

Maths pour l'Info 1

– L1 –
2012-2013

TD n° 2 : mots et langages

► **Exercice 1** ◀ Soit l'alphabet $A = \{a, b, c\}$ et le mot $u = acb$. Quels sont les préfixes de u ? quels sont ses suffixes ? ses facteurs ?

► **Exercice 2** ◀ Soit $L = \{ab, ba\}$. Parmi les mots suivants, lesquels sont dans L^* : $abba, ababa, aabb, ababab, \varepsilon, baab, bbaabb$?

► **Exercice 3** ◀ Soit $E = \{baa, ba, bba\}$ et $F = \{b, ab\}$, calculez $E \cdot F$ et $F \cdot E$.

► **Exercice 4** ◀ Soit \mathcal{P} l'ensemble des langages ne contenant que des palindromes sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$. Est-ce que les langages suivants sont dans \mathcal{P} ?

- $L_1 = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $L_3 = \{a^n b a^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
- $L_4 = \{c a^n b a^n c \mid n \in \mathbb{N}\}$

Est ce que \mathcal{P} est stable pour l'union, l'intersection, la concaténation et le passage au carré ($L \cdot L$) ?

► **Exercice 5** ◀ Sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$ quels sont les mots plus petits que bac pour l'ordre militaire (d'abord la taille puis dictionnaire) ? Combien y a-t-il de mots plus petits que bac pour l'ordre lexicographique ?

► **Exercice 6** ◀ On travaille sur l'alphabet $A = \{a, b\}$. Soit $L = (\{a\}^* \cdot \{b\})^*$. Montrez que L est exactement l'ensemble des mots qui ne se terminent pas par un a .

► **Exercice 7** ◀ Est-ce que la relation "est préfixe de" définie sur les mots de A^* est une relation d'ordre ?

► **Exercice 8** ◀ Soit $E = \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\}$ l'ensemble des langages non vides. On définit l'application f de E dans A^* qui à un ensemble de mots X associe son plus petit mot pour l'ordre militaire :

$$f(X) = \min_{\text{mil}} X.$$

Est-ce que f est injective ? surjective ?

► **Exercice 9** ◀ Soit u un mot sur l'alphabet A , un bord de u est un mot, différent de u lui-même, qui est à la fois préfixe et suffixe de u . Quels sont tous les bords

de $u_1 = aabaaba$ et de $u_2 = baabaabab$? Montrer que la relation "est un bord de" est transitive.

► **Exercice 10** ◀ Soit X un langage. On note $\text{Pref}(X)$ l'ensemble de tous les préfixes des mots de X . On dit qu'un langage X est préfixiel si $X = \text{Pref}(X)$.

Sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$, le langage $E = \{\varepsilon, 0, 01, 1, 011, 010, 01110, 01111\}$ est-il préfixiel ? Le langage $F = \{0^n 1^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ est-il préfixiel ? $F = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est-il préfixiel ?

Montrer que pour tout langage X , $\text{Pref}(X) = \text{Pref}(\text{Pref}(X))$.

► **Exercice 11** ◀ Soient a et b deux lettres de A et $w \in A^*$. Montrer que $aw = wb$ si et seulement si $a = b$ et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $w = a^p$.