Maths pour l'Info 1

– L1 –

2012-2013

TD n° 5: notation $\mathcal{O}$

► Exercice 1 ◄ Donnez une approximation la plus précise et la plus simplifiée possible des fonctions suivantes, sous la forme $\Theta(f_n)$ quand c'est possible ou $\mathcal{O}(f_n)$ sinon.

(a) $\frac{3^n(1+\cos(\frac{\pi n}{2}))+n^3}{2}$

(b) $10^8 n^4 + n^n + 10^{-8} 4^n$

(c) $\frac{27n^2+6n^3\ln n+8\ln^4 n+e^{\sqrt{\ln n}}}{\pi\sqrt{n}}$

► Exercice 2 ◄ Montrer que $\ln n! = \Theta(n \ln n)$.

► Exercice 3 ◄ Soit $\alpha \geq 1$ un entier et $A_\alpha(n) = \sum_{i=1}^{n} i^\alpha$. Que vaut $A_1(n)$? Montrer que $A_\alpha(n) \in \Theta(n^{\alpha+1})$.

► Exercice 4 ◄ Pour chaque couple de suite f_n, g_n précisez si $f_n \in \mathcal{O}(g_n)$, $f_n \in \Omega(g_n)$ ou $f_n \in \Theta(g_n)$.

a)	$f_n = n^{10}$	$g_n = 2^{n/2}$
b)	$f_n = n^{3/2}$	$g_n = n\ln^2(n)$
c)	$f_n = \ln(n^3)$	$g_n = \ln(n)$
d)	$f_n = \ln(3^n)$	$g_n = \ln(2^n)$
e)	$f_n = 2^n$	$g_n = 2^{n/2}$
f)	$f_n = n^2$	$g_n = (n/2)^2$
g)	$f_n = (2+\cos(\frac{\pi n}{2}))n^2$	$g_n = 6n^2 + \ln n$

► Exercice 5 ◄ Soit X un ensemble de suites, on définit e^X par

$$e^X = \{(e^{u_n})_{n\in\mathbb{N}} \mid u_n \in X\}.$$

A-t-on $e^{\mathcal{O}(n)} \subset \mathcal{O}(e^n)$?

► Exercice 6 ◄ On reprend l'exercice 3, afin d'obtenir une estimation plus précise. Montrer, avec la méthode d'approximation par intégrales, que pour tout entier $k \geq 1$ on a :

$$A_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \mathcal{O}(n^k).$$

► Exercice 7 ◄ Montrer que

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i\ln(i) = \frac{1}{2}n^2\ln n + \mathcal{O}(n^2).$$