Maths pour l'Info 3

– L2 –

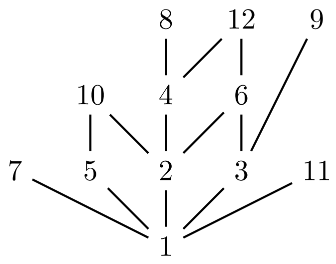
2014-2015

TD n° 2 : récurrences et clôtures

Note pour les chargés de TD : c'est normal si vous n'avez pas le temps de terminer la feuille, mais il faut faire au moins les cinq premiers exercices.

▶ **Exercice 1** ◀ On considère l'ensemble $E = \{1, \ldots, 12\}$ des 12 premiers entiers et l'ordre "divise", comme dans le premier exercice de la feuille 1. Dessinez le diagramme de Hasse associé.

Correction :



▶ **Exercice 2** ◀ On considère le programme suivant :

```
for(i=1;i<=n;i++)
  for(j=1;j<=i*i;j++)
    printf("*");
```

Montrez qu'il y a $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ étoiles affichées.

Correction : On remarque que pour un i fixé, il y a exactement i^2 étoiles affichées. On doit donc calculer :

$$S_n = \sum_{i}^{n} i^2.$$

Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que la formule est vraie :

- Initialisation : en $n = 1$ c'est trivialement vrai.

- Hérédité : supposons que la propriété est vraie au rang n et calculons S_{n+1}. On a

$$\begin{aligned}
S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)}{6}\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right) \\
&= \frac{(n+1)}{6}(2n^2 + 7n + 6) \\
&= \frac{(n+1)}{6}(2n+3)(n+2).
\end{aligned}$$

La dernière étape se fait soit en remarquant que -2 est racine évidente, soit en résolvant par la méthode du discriminant ($\Delta = b^2 - 4ac$).

▶ **Exercice 3** ◀

(a) Montrez que la somme des n premiers nombres impairs est un carré.

(b) Donnez une interprétation géométrique.

Correction :

(a) Le but de l'exo est de faire comprendre que pour faire une récurrence c'est souvent plus simple d'avoir une formule précise : ici on ne peut pas faire la récurrence en supposant seulement que c'est un carré au rang plus petits. Il faut énoncer et prouver quelquechose de plus précis. Pour leur faire deviner la bonne formule, faîtes les chercher pour les petites valeurs de n.

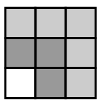
Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2.$$

- Initialisation : trivial.
- Hérédité : supposons la formule vraie au rang n et montrons-la au rang $n+1$:

$$S_n + 1 = S_n + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

(b) c'est plus pour l'anecdote, voilà l'interprétation :



On met 1 carré blanc, 3 carrés gris foncé, 5 carrés gris clair, etc. A chaque fois on agrandit le carré total en ajoutant une rangée au dessus et une colonne à droite, soit $2n+1$ carrés. La somme est le nombre total de petits carrés.

► **Exercice 4** ◄ Soit l'alphabet $A = \{a, b\}$. On suppose que le mot $u \in A^*$ vérifie l'équation :

$$au = ua.$$

Montrez que u ne contient pas de b.

Correction : Par récurrence sur la longueur n du mot, on montre que u est de la forme $u = a^n$.

- Initialisation : pour $n = 0$ on a $u = \varepsilon = a^0$, ok.
- Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n et montrons-la au range $n+1$. Soit donc u un mot de longueur $n+1$ vérifiant l'équation. On a $au = ua$, donc en regardant la première lettre et comme u n'est pas le mot vide, on en déduit que u commence par un a : il existe un mot v tel que $u = av$. Le mot v est de longueur n. En remplaçant u par av dans l'équation, on obtient : $aav = ava$. En simplifiant par a à gauche cela devient $av = va$. Comme $|v| = n$ et que v vérifie l'équation on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et on obtient que $v = a^n$. Donc $u = a^{n+1}$.

rmq : on a démontré un résultat plus général en cours.

► **Exercice 5** ◄ Soit $q \neq 1$ un réel. Montrez que pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Que vaut la somme si $q = 1$?

Correction : Immédiat, par récurrence. Pour $q = 0$, il faut utiliser la convention que $0^0 = 1$.
Pour $q = 1$, ça fait $n + 1$ puisqu'on somme la valeur 1.

► **Exercice 6** ◄ On considère la propriété P définie sur les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ par :

$$P(X) = \text{Vrai} \Leftrightarrow \forall x \in X,\ x + 1 \in X.$$

(a) Donnez des exemples de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui vérifient P et des exemples qui ne vérifient pas P.

(b) Montrez que si $X \neq \emptyset$ est un ensemble fini, alors $P(X) = \text{Faux}$.

(c) Montrez que P est stable par intersection quelconque : si $\mathcal{I}$ est un ensemble d'indices et que les X_i sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui vérifient P alors

$$P\left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} X_i\right) = \text{Vrai}.$$

(d) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui contiennent 0 et qui vérifient P. Quel est l'ensemble $F = \cap_{X \in \mathcal{F}} X$?

(e) Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui contiennent $[0, 1]$ et qui vérifient P. Quel est l'ensemble $G = \cap_{X \in \mathcal{F}} X$?

Correction :

(a) Qui vérifient : $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, etc. Qui ne vérifient pas : $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}^-$, $\{\text{nombres pairs}\}$, $\{1, 2, 3\}$, etc.

(b) Si X est fini et non vide, soit x le plus grand élément de X. Si X vérifiait P, il faudrait que $x + 1$ soit dans X, ce qui est impossible.

(c) Soit $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ une famille de sous-ensembles qui vérifient tous P. Soit $F = \cap_{i \in \mathcal{I}} A_i$. Pour tout $x \in F$, x est dans tous les A_i; comment les A_i vérifient P, $x + 1$ est aussi dans tous les A_i, et donc dans F. Par suite, F vérifie P.

(d) Montrons par double inclusion que $F = \mathbb{N}$. D'abord, $\mathbb{N}$ contient $\{0\}$ et vérifie P. Donc $F \subset \mathbb{N}$ (puisque c'est l'intersection de $\mathbb{N}$ avec d'autres ensembles).

Réciproquement montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \in F$. L'initialisation est trivialement vraie. Supposons que c'est vrai au rang n. Pour le rang $n + 1$ il suffit de remarquer que comme $n \in F$ et que F vérifie P, $n + 1$ aussi.

(e) Le résultat est $\mathbb{R}^+$, par double inclusion comme précédemment. Pour la réciproque, on peut montrer par récurrence que tout intervalle de la forme $[n, n + 1]$ est inclus dans G, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

► **Exercice 7** ◄ Un arbre binaire complet est un arbre dont tous les nœuds ont 0 ou 2 fils. Montrez que si un arbre binaire complet possède $n \geq 0$ nœuds internes (nœuds qui ne sont pas des feuilles), alors il possède exactement $n + 1$ feuilles.

Correction : Par récurrence (étendue) sur le nombre de nœuds internes.

- Initialisation : s'il n'y a pas de nœud interne, l'arbre est composé juste de sa racine qui est une feuille.
- Hérédité : on suppose la propriété vraie jusqu'au rang n et on a la montre au rang $n + 1$. Soit donc un arbre $\mathcal{A}$ avec $n + 1$ nœuds internes. La racine est nécessairement un nœud interne. Donc $\mathcal{A}$ est de la forme $\mathcal{A} = \overset{\circ}{\underset{\mathcal{B}\ \mathcal{C}}{/\backslash}}$ où $\mathcal{B}$ est un arbre avec k nœuds internes et $\mathcal{C}$ est un arbre avec $n - k$ nœuds internes ($k \in \{0, \ldots, n\}$). Par hypothèse de récurrence, $\mathcal{B}$ possède $k + 1$ feuilles et $\mathcal{C}$ possède $n - k + 1$ feuilles. Donc $\mathcal{A}$ possède $k + 1 + n - k + 1 = n + 2$ feuilles.