Maths pour l'Info 3

– L2 –

2014-2015

TD n° 5 : fonctions sur les structures inductives

▶ **Exercice 1** ◀ Soit $U = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'ensemble des couples d'entiers. On définit inductivement l'ensemble E par :

$$\begin{cases} B = \{(0,0)\} \\ f : (x,y) \mapsto (x+1, y) \\ g : (x,y) \mapsto (x, y+1) \end{cases}$$

(a) Montrez que $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(b) Est-ce que l'induction est libre ?

▶ **Exercice 2** ◀ Définir inductivement l'application qui à un mot sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ associe son miroir.

▶ **Exercice 3** ◀

(a) Donnez et prouvez une définition inductive libre pour l'ensemble $\mathcal{E}$ des mots binaires représentant des écritures d'entiers en base 2 (donc sans 0 inutiles en tête).

(b) Définir inductivement la fonction $val : \ \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{N}$, qui à une écriture binaire associe sa valeur entière.

(c) Ecrire le programme récursif correspondant.

▶ **Exercice 4** ◀ On considère l'ensemble des mots bien parenthésés $\mathcal{P}$ défini inductivement par $B = \{\varepsilon\}$ et la règle $f(u,v) = aubv$ pour tout $u, v \in \mathcal{P}$. On admet que l'induction est libre (cela a été vu en cours). On considère également l'ensemble des arbres binaires complets $\mathcal{A}$ défini inductivement par $B = \{\square\}$ et la règle

$$g(A_1, A_2) = \begin{array}{c} \square \\ / \quad \backslash \\ A_1 \quad A_2 \end{array}$$

Soit ϕ la fonction de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{A}$ définie inductivement par $\phi(\varepsilon) = \square$ et

$$\phi\left(f(u,v)\right) = g\left(\phi(u), \phi(v)\right).$$

(a) Montrez que ϕ est une bijection en construisant sa réciproque ψ.

(b) Montrez que l'image par ϕ d'un mot bien parenthésé de longueur $2n$ est toujours un arbre binaire complet avec $2n+1$ nœuds.

▶ **Exercice 5** ◀ On considère l'ensemble des expressions rationnelles $\mathcal{E}$ sur l'alphabet A qui est défini inductivement par

- $B = \{\varepsilon\} \cup A$
- Si $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$, les expressions suivantes y sont aussi, représentant l'union, la concaténation et l'étoile :

$$\begin{array}{c} + \\ / \quad \backslash \\ E_1 \quad E_2 \end{array}, \quad \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ E_1 \quad E_2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} * \\ | \\ E_1 \end{array}$$

(a) Ecrire la fonction de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{N}$ qui retourne le nombre d'étoile dans l'expression.

(b) Ecrire la fonction de $\mathcal{E}$ dans $\{\texttt{vrai}, \texttt{faux}\}$ qui a une expression retourne si son langage contient le mot vide ou non.

(c) Ecrire la fonction de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui simplifie l'expression en appliquant les identités sur les langages $E \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot E = E$.