PC 3
Récursivité

- Appels de fonctions en Java
- Appels récursifs
- Fractales
- Les tours de Hanoi
- Quicksort

Généralités

L'utilisation de la récursivité permet d'écrire en général plus facilement les programmes : c'est une traduction directe des définitions par récurrence.

Cependant, les performances (en temps ou en place) des programmes ainsi écrits sont parfois beaucoup moins bonnes.

On peut dans certains cas commencer par écrire en récursif (prototypage) pour optimiser ensuite.

Exemples simples

Calcul de $n! = n \times (n-1)!$:

```
static int fact(int n ) {
  return (n == 0)?  1 : n * fact(n-1);
}
```

Calcul du pgcd de m et n

```
static int pgcd (int m, int n) {
  return (m == 0)?  n : pgcd(n % m, m);
}
```

L'algorithme converge car $n + m$ diminue.

L'écriture en binaire

Pour écrire un entier x en binaire, on peut utiiser la formule récursive

$$bin(x) = (bin(q), r)$$

avec $x = 2q + r$. On en déduit facilement

```
static void binaire(int x) {
  if (x>= 2) binaire(x/2);
  System.out.print(x%2);
}
```

Suites de Farey

On cherche à donner dans l'ordre la suite $F(N)$ des nombres rationnels $0 \leq p/q \leq 1$ tels que $p \leq N$. On utilise la classe

```
class Rat{
  final static int N=5;
  int num, den;
  Rat(int n, int m) { num= n; den=m; }
  static void Farey(Rat x, Rat y) {
    Rat m= new
      Rat(x.num+ y.num, x.den + y.den);
    if (m.den <= N) {
      Farey(x,m);
      System.out.print(m.num +"/"+ m.den);
      Farey(m,y);
    }
  }
```

```
  public static void main(String[] args) {
    Rat
     zero=new Rat(0,1),
     un= new Rat(1,1);
    Farey(zero,un);
}
```

La fonction Farey affiche les éléments de $F(N)$ dans $]x, y[$ pour $x = p/q, y = r/s$ avec $qr - ps = 1$.

Résultat :

```
1/5 1/4 1/3 2/5 1/2 3/5 2/3 3/4 4/5
```

Comment ça marche?

La mémoire est gérée de façon *dynamique* : une nouvelle zone est utilisée pour chaque appel de la fonction dans la *pile d'exécution.* De cette façon, les anciennes valeurs ne sont pas écrasées.

Pour chaque appel, on reserve des places dans un *enregistrement d'activation* pour :

- Les valeurs des paramètres.
- La valeur rendue.
- L'adresse de retour
- Les variables locales

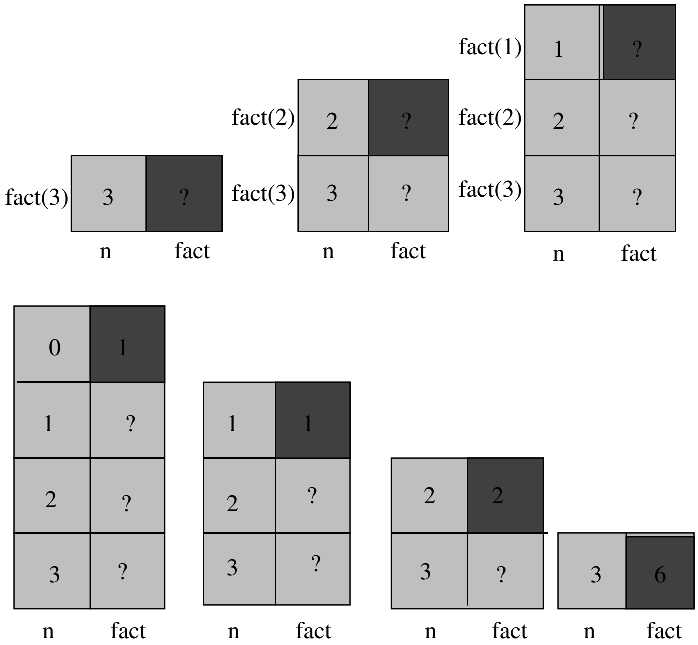


Figure 1: La pile d'execution

Suite de Fibonacci

Suite récurrente linéaire F_n définie par $F_0 = F_1 = 1$ et

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

On a $F_n \simeq \varphi^n$ avec $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$. Calcul récursif:

```
static int Fibo(int n) {
 return (n <= 1)?
    1 : Fibo(n-1)+Fibo(n-2);
}
```

Temps de calcul:

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2)$$

d'où

$$T(n) \simeq F_n$$

Calcul itératif:

```
static int Fibo(int n) {
  int i, u, v;
  u = 1; v = 1;
  for (i = 2; i<= n; ++i) {
    v = u + v;
    u = v - u;
  }
  return v;
}
```

Forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix}$$

La fonction d'Ackerman

C'est la fonction définie par:

```
static int Ack (int m, int n) {
  if (m  == 0) return n+1;
  else if (n == 0) return Ack(m-1, 1);
  else return Ack (m-1, Ack(m, n-1));
}
```

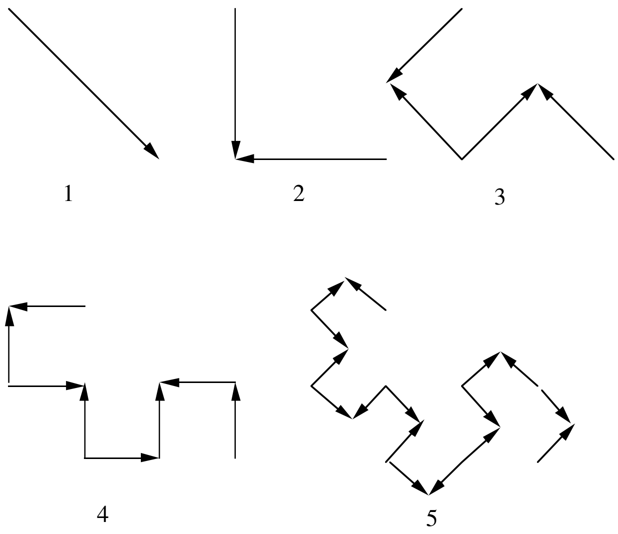
Premières valeurs:

$$\begin{aligned} Ack(1,n) &= n+2 \\ Ack(2,n) &\simeq 2*n \\ Ack(3,n) &\simeq 2^n \\ &\dots \end{aligned}$$

Fractales

Principe: objets définis par itération de transformations et donc aisément définissables récursivement.

Un exemple possible est le dragon de Heighway, qui est la courbe obtenue ainsi:



La courbe du dragon de Heighway est donnée par l'applet suivante:

```
import java.awt.*;
import java.applet.*;

public class Dragon extends Applet {

  public void paint(Graphics g) {
    g.setColor(Color.red);
    drawDragon(g, 20, 100, 100, 200, 200);
  }
  void drawDragon (Graphics g, int n,
      int x, int y, int z, int t) {
    int u, v;
    if (n == 1)
      g.drawLine (z, t);
    else {
      u = (x + z + t - y) / 2;
      v = (y + t - z + x) / 2;
      drawDragon (g, n - 1, x, y, u, v);
      drawDragon (g, n - 1, z, t, u, v);
    }
  }
}
```

Execution d'une applet

On crée un fichier `Dragon.html` contenant

```
<HTML>
<HEAD>
<TITLE> Courbe du dragon </TITLE>
</HEAD>

<BODY>
<APPLET CODE="Dragon.class" WIDTH=600
                          HEIGTH=600></APPLET>
</BODY>
</HTML>
```

on ouvre ensuite ce fichier sous Netscape ou directement par

```
appletviewer Dragon.html
```

Les tours de Hanoi

Problème: On dispose n plaques sur le piquet 1 et on a deux autres piquets vides. On veut amener toutes les plaques du piquet 1 au piquet 3 en respectant les règles suivantes:

1. Une plaque ne peut être placée que sur une plus grande.
2. On ne peut déplacer qu'une plaque à la fois.

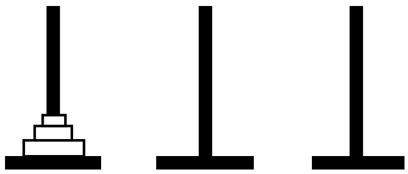


Figure 2: Le cas n=3

Solution récursive:

```
static void Hanoi (int n, int i, int j) {
  if (n > 0) {
    Hanoi (n-1, i, 6 - (i+j));
    System.out.print(i+"->"+ j);
    Hanoi (n-1, 6 - (i+j), j);
  }
}
```

Quicksort

C'est l'une des méthodes de tris les plus efficaces en pratique (tri interne standard d'Unix) avec les caractéristiques suivantes:

1. Temps $O(n \log n)$ en moyenne (mais pas dans le pire des cas) avec une petite constante.
2. Tri sur place (espace constant)

Principe:

```
void QSort (int g, int d) {
  int i;
  if (g < d) {
    v = a[d];
  {\it partitionner le tableau autour de v}
  {\it et mettre $v$ a sa bonne position $i$}
  QSort (g, i - 1); QSort (i + 1, d);
  }
}
```

Le programme (version de R. Sedgewick):

```
void QSort (int g, int d) {
  int i, j, t, v;
  if (g < d) {
    v = a[d]; i = g - 1; j = d;
    do {
      do
        ++i;
      while (a[i] < v);
      do
        --j;
      while (a[j] > v);
      t = a[i]; a[i] = a[j]; a[j] = t;
    } while (j > i);
    a[j] = a[i]; a[i] = a[d]; a[d] = t;
    QSort(g, i - 1);
    QSort(i + 1,d);
  }
}
```