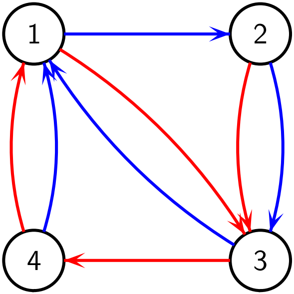
Le coloriage des routes

Dominique Perrin

17 décembre 2009

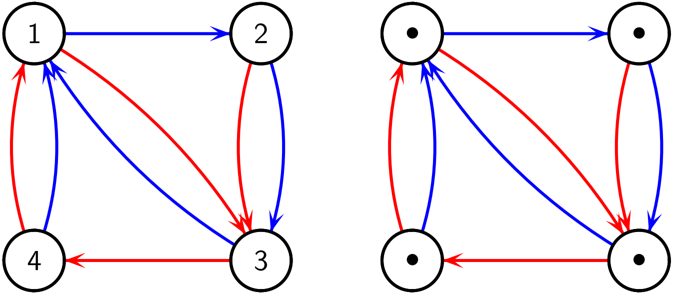
Un exemple

Un automate déterministe avec quatre états et deux lettres B et R.



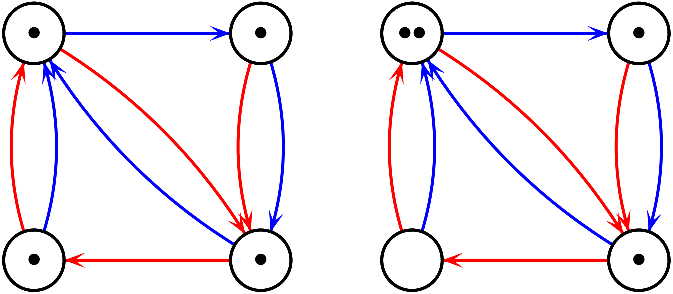
BRB est un mot synchronisant : quel que soit le point de départ, on arrive en 1.

Un jeu de solitaire



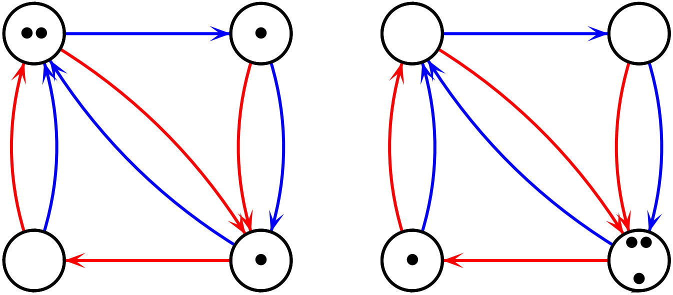
On place un jeton dans chaque sommet

Un jeu de solitaire



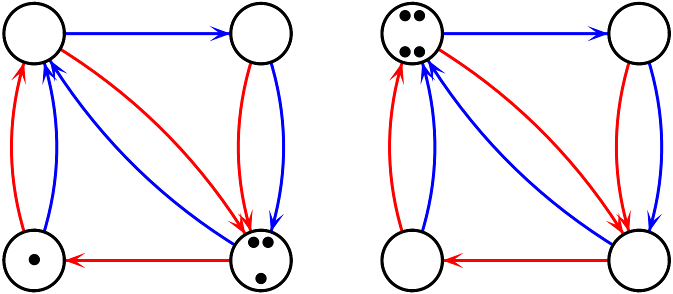
On joue *B*

Un jeu de solitaire



On joue R

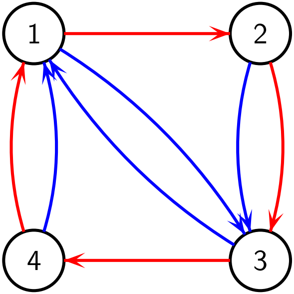
Un jeu de solitaire



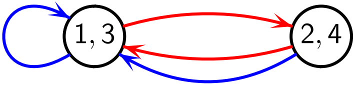
On joue finalement B et tous les jetons sont au même endroit : BRB est un mot synchronisant.

Un autre exemple

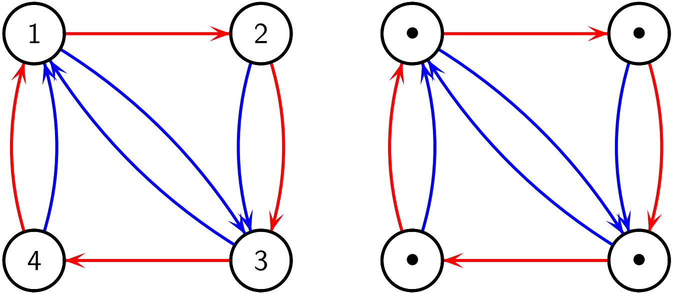
Avec un coloriage différent :



Il n'y a pas de mot synchronisant : Les ensembles $\{1,3\}$ and $\{2,4\}$ ne peuvent être réduits :

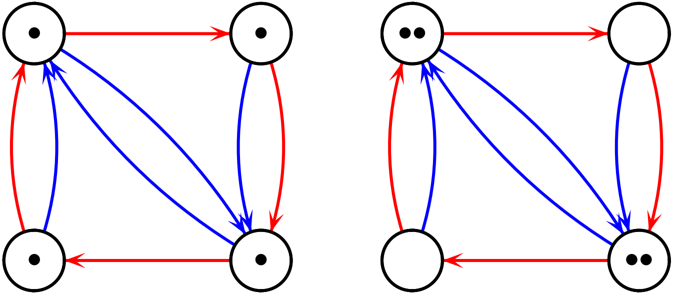


Encore le solitaire



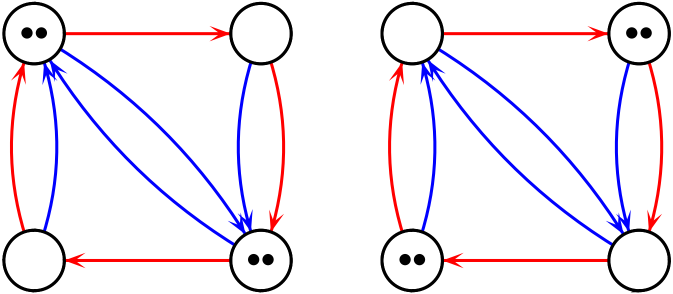
On place un jeton dans chaque sommet

Encore le solitaire



On joue B

Encore le solitaire



On joue R

Le coloriage des routes

Un graphe de degré sortant constant est coloriable s'il existe un coloriage de ses flèches tel que

1. les flèches sortant d'un sommet sont de couleurs différentes (= automate déterministe complet)

Un graphe de degré sortant constant est coloriable s'il existe un coloriage de ses flèches tel que

1. les flèches sortant d'un sommet sont de couleurs différentes (= automate déterministe complet)
2. il y a un mot synchronisant.

Un graphe de degré sortant constant est coloriable s'il existe un coloriage de ses flèches tel que

1. les flèches sortant d'un sommet sont de couleurs différentes ($=$ automate déterministe complet)
2. il y a un mot synchronisant.

Graphe apériodique : le pgcd des longueurs des cycles est 1.

Le coloriage des routes

Un graphe de degré sortant constant est coloriable s'il existe un coloriage de ses flèches tel que

1. les flèches sortant d'un sommet sont de couleurs différentes (= automate déterministe complet)
2. il y a un mot synchronisant.

Graphe apériodique : le pgcd des longueurs des cycles est 1.

Proposition

Un graphe coloriable est apériodique.

Le théorème de Trahtman

Théorème (Avram N. Trahtman, 2007)

Tout graphe irreductible qui est apériodique et a degré sortant constant est coloriable.

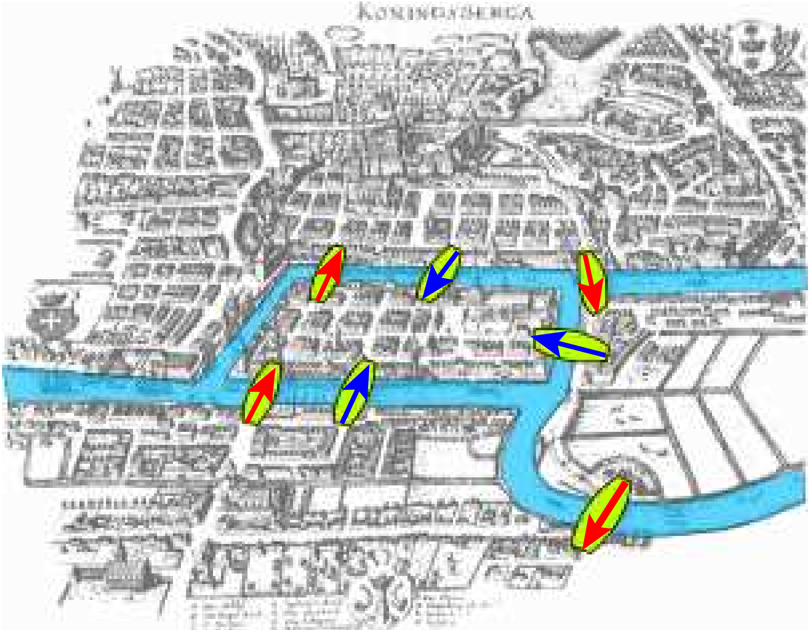
Le théorème de Trahtman

Théorème (Avram N. Trahtman, 2007)

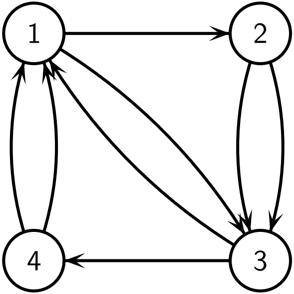
Tout graphe irreductible qui est apériodique et a degré sortant constant est coloriable.

Conjecture de Adler,Goodwin, Weiss, 1977.

Les sept ponts de Königsberg

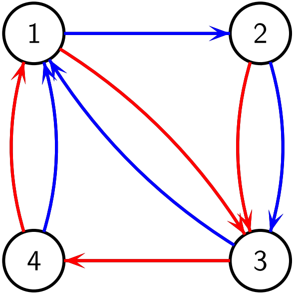


Exemple



Un graphe coloriable

Exemple



Un bon coloriage.

Motivations

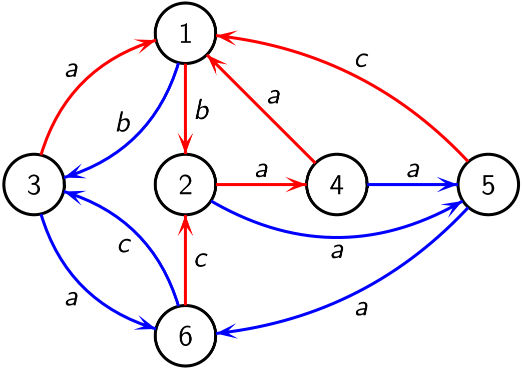
- stockage de données : le coloriage définit un codage correspondant aux flèches du graphe. Un mot synchronisant permet de remettre le décodeur dans un état déterminé (Lind, Marcus, Symbolic dynamics and coding, Cambridge, 1995).

- stockage de données : le coloriage définit un codage correspondant aux flèches du graphe. Un mot synchronisant permet de remettre le décodeur dans un état déterminé (Lind, Marcus, Symbolic dynamics and coding, Cambridge, 1995).
- conception automatisée : dispositifs recevant des pièces orientées de façon arbitraire et les plaçant dans une orientation donnée (Eppstein, 1990).

Motivations

- stockage de données : le coloriage définit un codage correspondant aux flèches du graphe. Un mot synchronisant permet de remettre le décodeur dans un état déterminé (Lind, Marcus, Symbolic dynamics and coding, Cambridge, 1995).
- conception automatisée : dispositifs recevant des pièces orientées de façon arbitraire et les plaçant dans une orientation donnée (Eppstein, 1990).
- protocoles de communication : suites de test pour vérifier si un protocole est conforme à sa spécification (Aho et al. 1991)

Le code de Franaszek (brevet IBM)



Une suite binaire est codée à vitesse $1/2$ par des suites de $a = 00$, $b = 01$ et $c = 10$. Le resultat satisfait la contrainte $[2, 7]$: deux 1 sont séparés par au moins 2 et au plus 7 symboles 0.

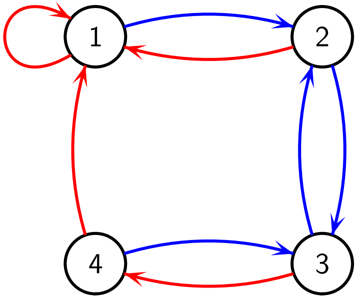
010 est un mot synchronisant.

Historique

1. Formulation du problème (Adler et al., 1977).
2. Graphes avec un cycle de longueur première (O'Brien, 1981).
3. Coloration et vecteurs propres (Friedman, 1990)
4. Codes préfixes synchronisés (P. and Schützenberger, 1992)
5. Graphes eulériens (Kari, 2001)
6. Solution (Trahtman, 2007)

Un cas simple

Hypothèse : le graphe a une boucle.



Solution : colorier rouge la boucle et les flèches d'un arbre recouvrant le graphe renversé à partir du sommet où est la boucle.

Le théorème d'O'Brien

Un graphe orienté est admissible s'il est irreductible, apériodique et a degré sortant constant.

Théorème (O'Brien, 1981)

Si un graphe admissible sans flèches multiples a un cycle C de longueur première alors il est coloriable avec toutes les flèches de C de la même couleur.

Preuve : extension du cas d'une boucle.

Let théorème de Friedman

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe admissible G et soit w un vecteur propre à gauche de M pour la valeur propre k (le degré sortant des sommets) :

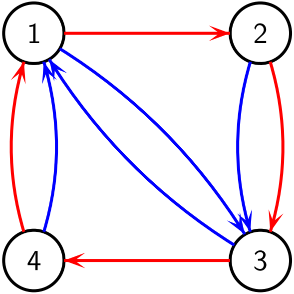
$$wM = kw$$

Choisissons w à composantes entières sans diviseur commun.

Théorème (Friedman, 1990)

Si un graphe admissible G a un cycle C de longueur première avec $W = \sum w(v)$, alors G est coloriable avec toutes les flèches de C de la même couleur.

Exemple



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad W = 6$$

La partition $\{1,2\}\{3,4\}$ en classes maximales est formée de classes de même poids.

Codes préfixes synchronisés

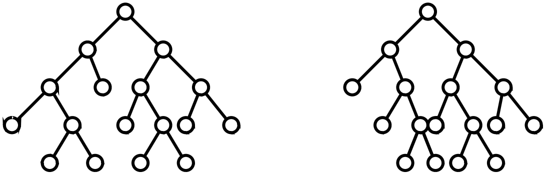


FIG.: Deux arbres binaires isomorphes/codes prefixes équivalents

Code préfixe synchronisé : L'automate obtenu en fusionnant les feuilles de l'arbre avec la racine a un mot synchronisant.

Théorème (P., Schützenberger, 1992)

Tout code préfixe maximal fini est équivalent à un code préfixe synchronisé.

Le théorème de Kari

Dans un automate déterministe, deux états u, v forment une paire stable si pour tout mot p il existe un mot q tel que pq mène u et v vers le même état.

Théorème (Culik, Karhumaki, Kari, 2001)

Si l'automate obtenu en fusionnant les paires stables est coloriable, l'automate de départ l'est aussi.

Corollaire (Kari, 2001)

Tout graphe admissible eulérian est coloriable.

Un graphe orienté est eulérien si le degré entrant de tout sommet est égal à son degré sortant.

La preuve de Trahtman

On considère un automate déterministe sur un ensemble d'états Q et un alphabet R, B.

1. Le niveau d'un état est le nombre de flèches R qui le mènent dans un cycle R.

La preuve de Trahtman

On considère un automate déterministe sur un ensemble d'états Q et un alphabet R, B.

1. Le niveau d'un état est le nombre de flèches R qui le mènent dans un cycle R.
2. Une image minimale est un ensemble I d'états tel qu'il existe un mot u avec $Q \cdot u = I$ et que $I \cdot v$ a autant d'éléments que I pour tout mot v.

La preuve de Trahtman

On considère un automate déterministe sur un ensemble d'états Q et un alphabet R, B.

1. Le niveau d'un état est le nombre de flèches R qui le mènent dans un cycle R.
2. Une image minimale est un ensemble I d'états tel qu'il existe un mot u avec $Q \cdot u = I$ et que $I \cdot v$ a autant d'éléments que I pour tout mot v.
3. Un échange consiste à échanger les couleurs des flèches sortant d'un état.

La preuve de Trahtman (suite)

1. Si le graphe est apériodique et sans paires stables et si le coloriage est tel que le nombre d'états sur un cycle rouge est maximal, par au plus deux échanges, on peut faire que tous les états de niveau maximal appartiennent au même arbre.

La preuve de Trahtman (suite)

1. Si le graphe est apériodique et sans paires stables et si le coloriage est tel que le nombre d'états sur un cycle rouge est maximal, par au plus deux échanges, on peut faire que tous les états de niveau maximal appartiennent au même arbre.
2. Si tous les états de niveau maximal appartiennent au même arbre, alors il existe deux images minimales qui diffèrent par un seul élément.

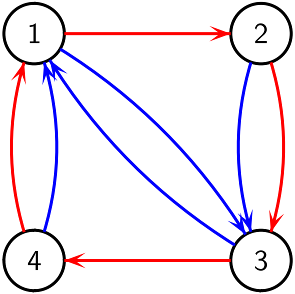
La preuve de Trahtman (suite)

1. Si le graphe est apériodique et sans paires stables et si le coloriage est tel que le nombre d'états sur un cycle rouge est maximal, par au plus deux échanges, on peut faire que tous les états de niveau maximal appartiennent au même arbre.
2. Si tous les états de niveau maximal appartiennent au même arbre, alors il existe deux images minimales qui diffèrent par un seul élément.
3. Si l'automate a deux images minimales différant par un seul élément, il a une paire stable.

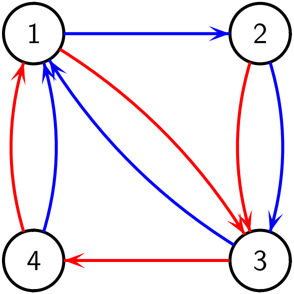
La preuve de Trahtman (suite)

1. Si le graphe est apériodique et sans paires stables et si le coloriage est tel que le nombre d'états sur un cycle rouge est maximal, par au plus deux échanges, on peut faire que tous les états de niveau maximal appartiennent au même arbre.
2. Si tous les états de niveau maximal appartiennent au même arbre, alors il existe deux images minimales qui diffèrent par un seul élément.
3. Si l'automate a deux images minimales différant par un seul élément, il a une paire stable.
4. Si l'automate a une paire stable : récurrence (argument de Culik et al.)

Exemple 1

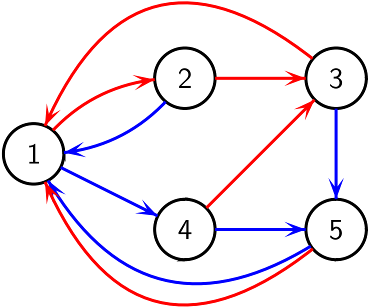


Tous les états sont au niveau 0

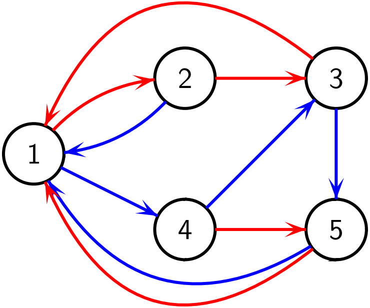


Echange des sorties de 1

Exemple 2



Images minimales $\{1, 2, 3\}$
et $\{1, 4, 5\}$



Echange des sorties de 4
$BRBRB$ synchronisant.

Extensions

1. Algorithme en $O(n^2)$ pour trouver un coloriage (D.P. & M. P. Béal)

Extensions

1. Algorithme en $O(n^2)$ pour trouver un coloriage (D.P. & M. P. Béal)
2. Extension aux automates non ambigus ?

Extensions

1. Algorithme en $O(n^2)$ pour trouver un coloriage (D.P. & M. P. Béal)
2. Extension aux automates non ambigus ?
3. Problème de Černy

Un problème encore non résolu

Problème (Černy, 1964)

Supposons qu'un automate à n états est synchronisé. Existe-t-il un mot synchronisant de longueur au plus $(n-1)^2$?

Vrai dans des cas particuliers :

- automates apériodiques (Trahtman, 2002)
- automates ayant un n-cycle (Pin, Dubuc, 1980)
- automates eulériens (Kari, 2001)
- ...