Systèmes de renouvellement

Dominique Perrin

- Ensembles à deux mots
- Ensembles à trois mots
- Finitude absolue
- Groupes syntaxiques

Un sytème de renouvellement (*renewal system*) est un ensemble de mots de la forme X^* où X est un ensemble fini. On rencontre de tels systèmes:

1. combinatoire des mots
2. codage
3. équations en mots
4. dynamique symbolique

Exemples

$$X = \{a, ba\}$$

système de Fibonacci.

$$X = \{ab, a, ba\}$$

solution de l'équation $xy = yz$.

$$X = \{ba, ca, aba, cba, aca, acba, aaca\}$$

code de Franaszek.

Ensembles à deux mots

On sait répondre à toutes les questions sur un ensemble $X = \{x, y\}$ à deux mots.

1. C'est un code (à délai borné) sauf si $x, y \in z^*$ (preuve par le thérème du défaut).

2. C'est un code circulaire sauf dans l'un des cas suivants:

   (a) $x = x'^n, y = y'^n$ avec x', y' conjugués.

   (b) $x^*y + xy^*$ contient un mot imprimitif (Lentin et Schützenberger, 1967).

3. Il existe, à la conjugaison près, au plus deux mots de X^* primitifs sur X mais pas sur A (l'un dans $x^* + y^*$, l'autre dans $x^+y + xy^+$).

Exemple:

$$x = a, y = baab$$

on a $z^2 = x^2y$ avec $z = aab$.

Ensembles à trois mots

On sait presque tout sur les ensembles $X = \{x, y, z\}$ à trois mots.

1. C'est un code sauf si (à une permutation près):
   (a) deux mots sont puissance d'un même troisième.
   (b) on a $xy = yz$
   (c) on a $x^n y = z^m$.
   (d) ...
2. En particulier tout sous monoïde de rang 3 de A^* est finiment présenté (Spehner, 1978) .
3. Une ensemble à trois mots est à délai borné dans un des deux sens.
4. Il existe au plus un mot infini avec deux décodages distincts (Karhumaki, 1985).

Exemple:

$$X = \{a, ba, bb\}$$

$$a \quad b \quad b \quad b \quad \cdots$$

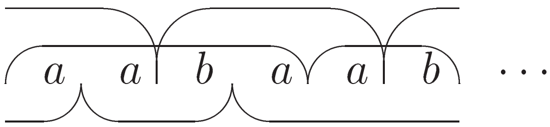
Finitude absolue

Paramètres syntaxiques absolument finis (bornés par Card(X) et pas par $\Sigma_{x \in X} |x|$):

1. nombre d'interpretations disjointes (sauf pour un nb fini de périodes) .
2. nombre de $\mathcal{D}$-classes régulières.
3. degré des groupes.

Exemple:

$$X = \{aaa, aaba, ab, baa\}$$



Le théorème du point critique

Un point critique d'un mot w est une factorisation $w = uv$ telle que pour aucun mot r de longueur inférieure à la période de w, les couples (u, v) et (r, r) ne sont compatibles.

Théorème. (Césari-Vincent, Duval 1979) *Tout mot possède au moins un point critique.*

Conséquence: Soit X ayant n éléments. Un mot ayant plus de n interprétations disjointes a une période $\leq$ au maximum des périodes des mots de X.

Groupes syntaxiques

Groupes syntaxiques de X: sous-groupes du monoïde syntaxique de X^*.

Soit $\varphi : A^* \to M$ le morphisme sur le monoïde syntaxique de X^*.
Dans M, les groupes sont représentés comme des groupes de permutation sur un ensemble Q. Le degré est le nombre des éléments de Q.

Un groupe syntaxique est *spécial* si $\varphi^{-1}(G)$ est cyclique.

Théorème. (Schützenberger, 1979)*Les groupes syntaxiques d'un ensemble à n mots qui ne sont pas spéciaux sont au plus de degré n.*

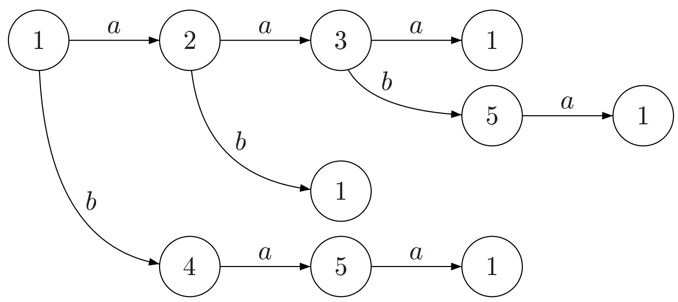
Preuve: si G est un groupe syntaxique de degré d et si $\varphi(w) \in G$ alors w a d interpretations disjointes.

Si G n'est pas spécial, $\varphi^{-1}(G)$ contient des mots de période arbitrairement grande.

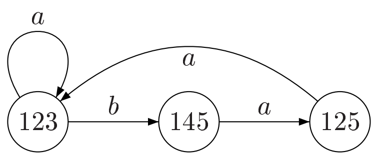
Exemple

$$X = \{aaa, aaba, ab, baa\}$$

Minimal automaton:



Action on 3-subsets:



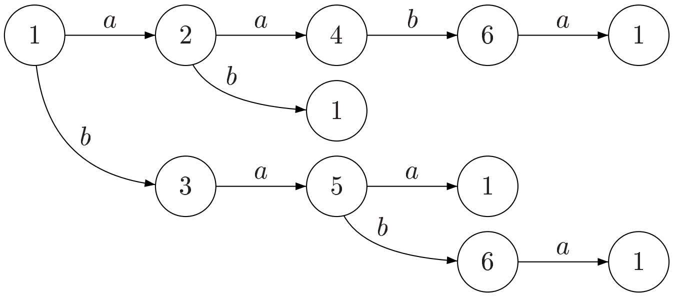
Groupe symétrique S_3 agissant sur $\{1, 2, 3\}$

$$a \to (123), \quad baa \to (23)$$

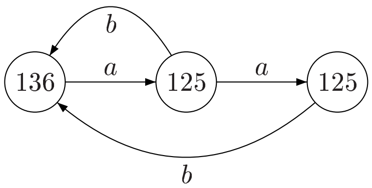
Exemple

$$X = \{aaba, ab, baa, baba\}$$

Minimal automaton:



Action on 3-subsets:



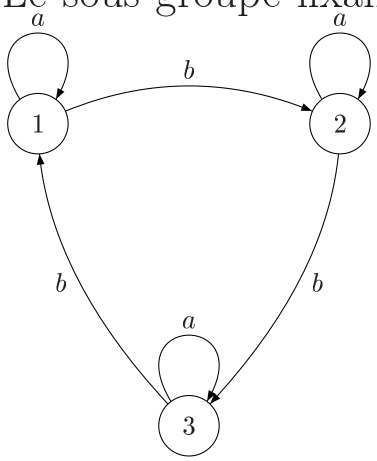
$$ab \to (36), \quad aab \to (16)$$

La formule de Schreier

Soit G un sous groupe d'indice fini d du groupe libre de rang r. Alors G est libre de rang n avec

$$n - 1 = d(r - 1).$$

Exemple: Le sous groupe fixant 1 est engendré



par

$$X = \{a, ba\bar{b}, bba\bar{b}\bar{b}, bbb\}$$

$$r = 2, d = 3, n = 3.$$

Une audacieuse conjecture

Conjecture. *Si un groupe de degré d et de rang r est un groupe syntaxique d'un ensemble X de n mots, alors*

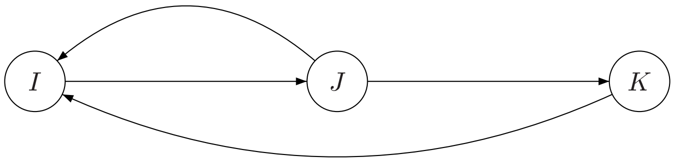
$$n-1 \geq d(r-1)$$

Un nouveau résultat

Théorème. *Soit X un code préfixe ayant n éléments. Les groupes syntaxiques de X non spéciaux sont de degré au plus $n - 1$.*

Preuve

Si M contient un groupe non spécial de degré d, on doit avoir au moins un ensemble de d états ayant deux successeurs.



Cela donne au moins $d+1$ feuilles dans l'arbre de X.

Conséquences

1. les groupes syntaxiques d'un ensemble à deux mots sont tous spéciaux.
2. les groupes syntaxiques d'un code préfixe à trois mots sont tous cycliques.

Questions:

1. peut-on étendre la méthode au cas d'un ensemble de mots quelconque (au lieu d'un code préfixe)?
2. peut-on avec la même méthode obtenir des preuves simples des résultats de Spehner et Karhumaki sur les ensembles à 3 mots?
3. peut-on obtenir la formule de Schreier?