Jeux et Stratégies

1. Jeux infinis
2. Exemples
3. Jeux ouverts
4. Jeux plus difficiles
5. La fin des fins

Jeux Infinis

On considère des jeux abstraits à deux jouuers.

On utlise un alphabet A et un ensemble $X \subset A^\omega$ de mots infinis sur A.

Chaque joueur joue à son tour et 0 commence.

Le jeu se déroule ainsi :

1. 0 choisit une lettre a_1
2. 1 choisit une lettre a_2
3. 0 choisit une lettre a_3
4. ...

Le joueur 0 gagne si le mot infini $x = a_1 a_2 \ldots \in X$ et sinon c'est 1 qui gagne.

Ceci est un modèle de jeux :

1. A information parfaite (pas de hasard)
2. Sans partie nulle

Exemples

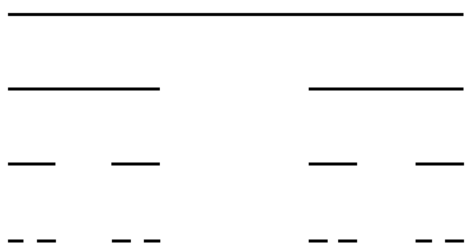
1. Jeu de Nim : on joue avec un ensemble de tas d'allumettes. Chaque joueur peut enlever un nombre quelconque d'allumettes dans un seul des tas. Celui qui ne peut plus jouer a perdu.

   Par exemple, le *jeu de Marienbad* utilise des tas de $(1, 3, 5, 7)$ allumettes. Le joueur qui commence perd.

2. Jeux indéfinis : morpion (*five-in-a row*), ...

3. Jeux infinis : jeux avec boucles (échecs,...)

4. Systèmes réactifs : le joueur 0 est le système et le joueur 1 est l'environnement. Une stratégie gagnante pour 0 permet de répondre aux événements extérieurs en préservant les spécifications du système.



Topologie

On considère l'ensemble A^ω des mots infinis comme un espace topologique.

On peut définir la topologie par une distance.

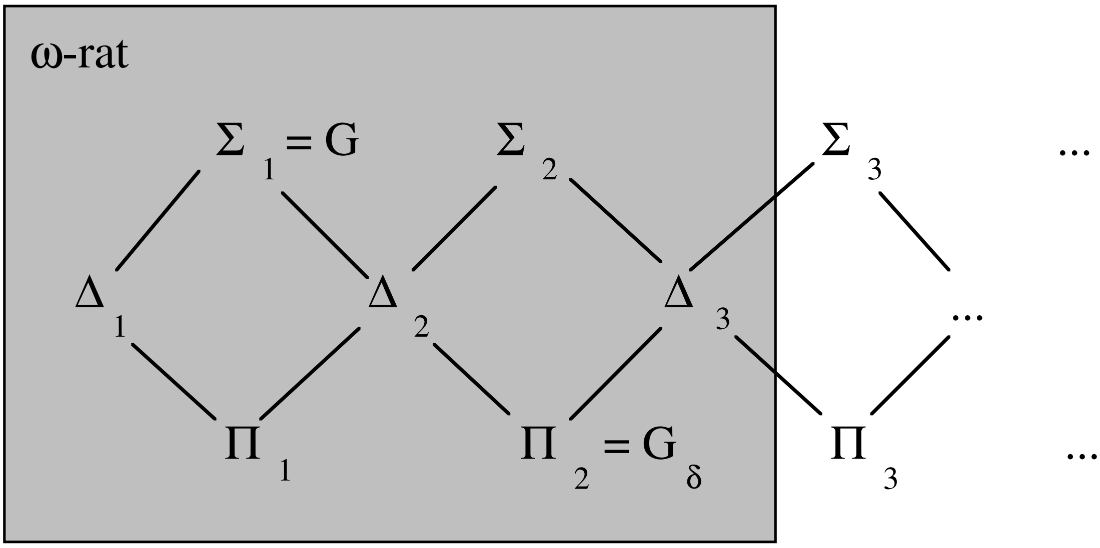
Règle: Deux mots sont d'autant plus proches qu'ils ont un long début commun.

Distance entre mots:

$$d(x, y) = 2^{-n}$$

$$n = min\{i \geq 0 \mid x_i \neq y_i\}$$

C'est l'espace de Cantor:



La hierarchie Borelienne

On note Σ_1 la famille des ouverts, Π_1 celle des fermés, puis ensuite

$$\Sigma_{n+1} = \exists^\omega \Pi_n, \qquad \Pi_{n+1} = \forall^\omega \Sigma_n$$

Σ_{n+1} est la famille des unions dénombrables de parties de Π_n et Π_{n+1} est la famille des intersections dénombrables de partis de Σ_n.

$$\Delta_n = \Sigma_n \cap \Pi_n$$

On obtient ainsi une hierarchie de parties de A^ω : la hiérarchie Borélienne finie.

Stratégies gagnantes

Une stratégie gagnante (pour 0) est une fonction

$$f : A^{2*} \to A$$

telle que pour tout mot $x = a_1 a_2 \dots$ tel que $a_{2i+1} = f(a_{2i})$ pour tout $i \geq 1$ on ait $x \in X$.

La même définition vaut pour 1 avec $f : A^{2*+1} \to A$.

On dit que le jeu est *déterminé* si l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante.

Théorème: (Martin) *Tout jeu tel que X est borélien est déterminé.*

Nous allons

1. Examiner des cas particuliers de ces jeux (ouverts, G_δ).
2. Examiner la complexité des stratégies gagnantes.

Les jeux ouverts

C'est le cas le plus simple (mais déja plus général que celui des jeux sur un graphe acyclique fini).

Théorème: (Gale et Stewart) *Tout jeu ouvert ou fermé est déterminé.*

On peut prouver ce résultat simple de deux façons. On suppose X ouvert.

Supposons que 0 n'a pas de stratégie gagnante. Soit U l'ensemble des positions de 1 dans lesquelles 0 n'a pas de stratégie gagnante. Pour chaque $w \in U$, il existe une lettre $a \in A$ telle que 0 n'a pas de stratégie gagnante. Ceci définit une stratégie gagnante pour 1.

Une preuve plus effective utilise une fonction de rang.

On considère une fonction

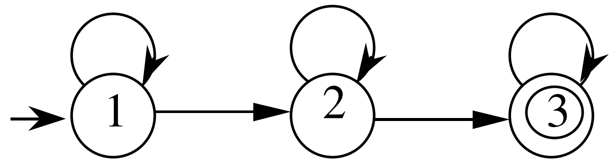
$$\rho : A^* \to N \cup \infty$$

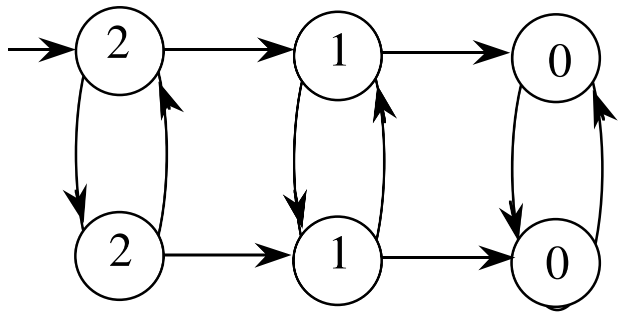
vérifiant les propriétés suivantes:

1. $\rho(x) = 0$ ssi $xA^\omega \subset X$.
2. $$\rho(x) = \begin{cases} \min\{\rho(xa) \mid a \in A\} + 1 & \text{si } |x| \text{ paire} \\ \max\{\rho(xa) \mid a \in A\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $\rho(\epsilon) < \infty$, alors 0 a une stratégie gagnante consistant à *diminuer le rang*.

Si $\rho(\epsilon) = \infty$, alors 1 a une stratégie gagnante: *rester hors des positions de rang fini*.





Exemple : jeu sur un graphe fini

On se donne un graphe fini sur Q et une partie F de Q. Les chemins gagnants pour 0 sont ceux qui passent par F.

Le rang se calcule sur les sommets du graphe (compte tenu de la parité). C'est une *stratégie sans mémoire.*

Jeux plus savants

On note $G_\delta = \Pi_2$ la famille des intersections dénombrables d'ouverts.

Par exemple, l'ensemble X des mots binaires ayant une infinité d'occurrences de b est dans G_δ.

Pour les jeux tels que $X \in G_\delta$, on a encore:

Théorème: (Wolfe) *Tout jeu G_δ est déterminé.*

On peut encore jouer sur un graphe fini sur Q, avec une partie $F \subset Q$. Le joueur 0 gagne si on passe infiniment souvent dans F.

Tout ensemble G_δ reconnaissable par automate fini est réductible à un ensemble de cette forme (Büchi).

Preuve 1

Supposons que

$$X = \cap_{n \geq 0} U_n A^\omega$$

où chaque U_n est un code préfixe et $u \in U_n$ est préfixe de $v \in U_m$ seulement si $n < m$.

Soit $T = \cup U_n$ et D l'ensemble des positions gagnantes pour 1. Pour tout $x \notin D$, 0 a une stratégie gagnante F_x pour atteindre $T - D$ depuis x. En effet, sinon 1 a une stratégie gagnante et il peut ainsi

- soit éviter T et gagner G
- soit atteindre D sur un mot y à partir duquel il peut gagner G.

Dans les deux cas, il gagne G, une contradiction.

On a donc une stratégie gagnante pour 0 à partir de tout $x_0 \notin D$: jouer F_{x_0} jusquà atteindre $x_1 \in T - D$ puis selon F_{x_1} jusqu'à atteindre $T - D$ de nouveau et ainsi de suite.

Preuve 2

Nous utilisons encore une fonction de rang mais définie cette fois sur les sommets d'un graphe biparti sur $Q = Q_0 + Q_1$ définissant le jeu. Par définition, 0 gagne si on passe infiniment souvsent dans $F \subset Q$.

On utilise d'abord le cas des ouverts pour définir, pour $V \subset Q$ l'ensemble $\mathrm{Attracteur}_0(V)$ des sommets desquels 0 peut forcer une visite de V en $i \geq 1$ étapes.

Soit V_i l'ensemble des sommets depuis lesquels 0 peut forcer au moins i passages dans F. On a $V_1 = F$ puis

$$V_{i+1} = V_i \cap \mathrm{Attracteur}_0(V_i)$$

Soit $\mathrm{Recur}(F)$ l'intersection de la suite décroissante des V_i. Le joueur 0 a une stratégie gagnante depuis les sommets de l'ensemble $\mathrm{Attracteur}_0(\mathrm{Recur}(F))$ et 1 depuis les autres.

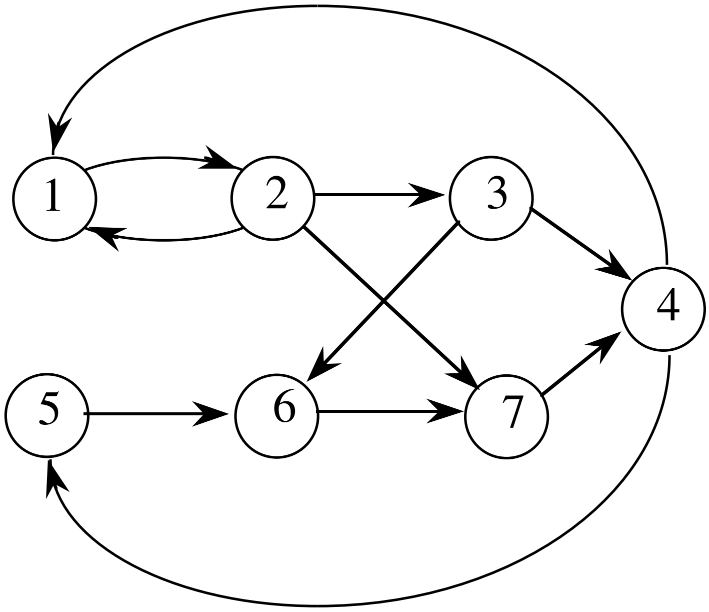
La fin des fins

On considère les combinaisons booléennes de G_δ.

Par un théorème de McNaughton, tout ensemble $X \subset A^\omega$ reconnaissable par automate fini est de ce type.

Les jeux correspondants sur un graphe sont définis par une famille $\mathcal{F}$ de parties de Q. Le joueur 0 gagne si l'ensemble des sommets visités infiniment souvent est dans $\mathcal{F}$.

Ces jeux possèdent toujours une stratégie gagnante à mémoire finie (théorème de Büchi-Landweber) mais ils ne possédent pas en général de stratégie sans mémoire.



Exemple

On considère le graphe ci-dessous avec $Q_0 =$ aux sommets pairs et la famille $\mathcal{F}$ formée de parties dont les états impairs sont $\{1, 3\}$ ou $\{1, 3, 5, 7\}$.

Le joueur 0 a une stratégie gagnante en 4 mais pas sans mémoire : Les deux choix depuis 4 (1 ou 5) s'ils sont faits systématiquement par 0 donnent une stratégie gagnante à 1: pour le choix de 5 c'est évident. Pour 1 en passant de 3 à 6.

Une stratégie possible consiste à mémoriser les deux derniers sommets impairs visités.

On choisit toujours 3 après 2. Ensuite en 4

- si c'est $(1, 3)$ ou $(5, 7)$, on choisit 1

- si c'est $(3, 7)$, on choisit 5.

Chaînes alternées

Par un théorème de Hausdorff, toute combinaison booléenne de G_δ peut s'écrire comme une chaîne alternée.

$$X = X_1 - X_2 + X_3 - \cdots \pm X_n$$

avec $X_1 \supset X_2 \supset \ldots$ et $X_i \in G_\delta$.

On considère un jeu sur un graphe sur $Q = Q_0 + Q_1$ biparti avec une suite $(E_1, F_1, \ldots, E_m, F_m)$ de parties de Q vérifiant

$$E_1 \subset F_1 \subset \cdots \subset E_m \subset F_m.$$

Le joueur 0 gagne s'il existe k tel que F_k est atteint infiniment souvent mais E_k finiment souvent.

Théorème (R. McNaughton, W. Thomas) *Dans un tel jeu, l'un des deux joueurs a une stratégie sans mémoire.*

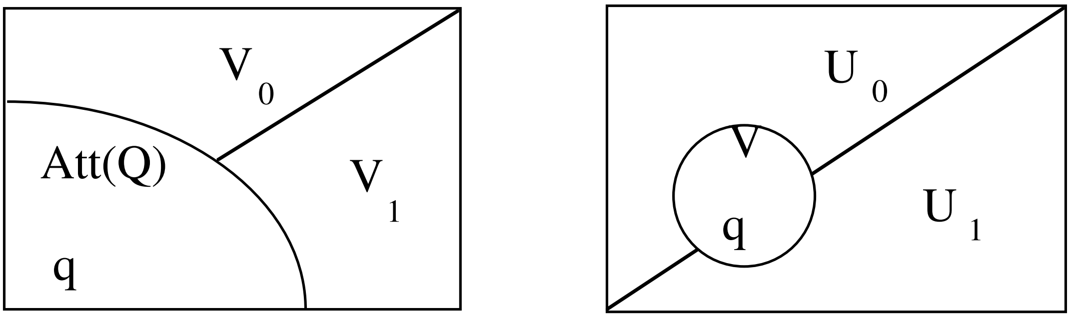


Figure 1: Les cas 1 et 2

Preuve

On procède par récurrence sur le nombre de sommets. On suppose que $E_1 = \emptyset$ (quitte à échanger 0 et 1).

Soit $q \in F_1$. On applique l'hypothèse de récurrence à $Q - \mathrm{Attracteur}_0(q)$. Elle donne des stratégies gagnantes sans mémoire pour 0 depuis V_0 et pour 1 depuis V_1.

Deux cas :

1. 0 peut forcer à aller de q dans V_0. Alors 0 a une stratégie gagnante depuis $V_0 \cup \mathrm{Attractaeur}_0(q)$ et 1 depuis V_1.

2. 1 peut forcer à aller de q dans V_1. On considère

l'ensemble $V = \text{Attracteur}_1(V_1)$. Dans le jeu sur $Q - V$, 0 gagne (sans mémoire) sur U_0 et 1 sur U_1 (hypothèse de récurrence). Dans G, 0 gagne sur U_0 et 1 sur $V \cup U_1$.