



CORRIGÉ

EXAMEN

Année 2008-2009

On répondra directement sur les feuilles d'examen en indiquant en pied de page ses NOM et Prénom. L'usage de documents n'est pas autorisé.

1. Statistiques

Soit une image de M lignes par N colonnes ne comportant pas de pixels de *background*.

- a. Ecrire la formule mathématique calculant la moyenne $\bar{m}$ en fonction des valeurs radiométriques $R(i,j)$ des pixels.

1

$$\bar{m} = \frac{1}{M \times N} \times \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} R(i, j)$$

- b. Ecrire la formule mathématique calculant l'écart-type σ en fonction des valeurs radiométriques $R(i,j)$ des pixels. On fournira les deux expressions mathématiques : -celle utilisée par les mathématiciens, -celle utilisée par les informaticiens et ne nécessitant qu'un passage dans l'image source

1

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{M \times N} \times \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} [R(i, j) - \bar{m}]^2}$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{M \times N} \times \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} (R(i, j))^2 - (\bar{m})^2}$$

- c. Ecrire la définition mathématique de l'histogramme $H(r)$ d'une image de M lignes par N colonnes, sans pixels de background et dont chaque pixel est codé sur 6 bits non signés.

1

Les pixels $R(i,j)$ prennent leur valeurs dans l'intervalle $[0, 2^6-1]$, soit $[0, 63]$

$$\forall r \in [0, 63], H(r) = \text{Card}(\{ R(i,j)=r, i=0..(M-1), j=0..(N-1) \})$$

2. Histogrammes

En examinant l'histogramme des deux images suivantes, commentez les caractéristiques de l'image correspondante.

- a. Image en niveaux de gris.

1

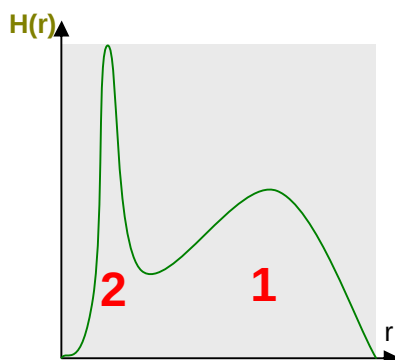


Image présentant deux populations incarnées par deux modes dans l'histogramme.

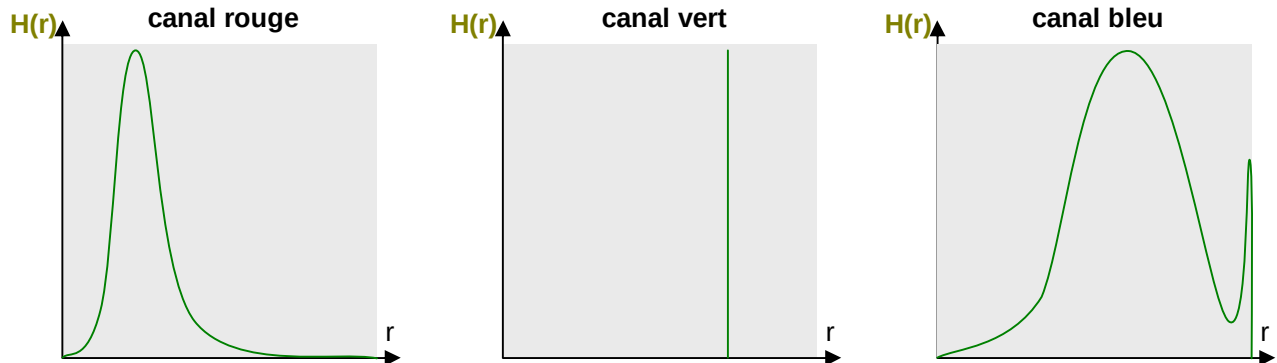
La population 1 est la plus représentée (mode principale). Elle présente une moyenne élevée (pixels clairs dans l'image) et un écart-type important (image à fort contraste).

La population 2 est la moins représentée (mode secondaire). Elle présente une moyenne faible (pixels sombres dans l'image) et un écart-type faible (image peu contrastée).

NOM : Prénom :



b. Composition colorée.



Le **canal rouge** présente une moyenne faible (image sombre) et un écart-type moyen (peu de contraste).

Le **canal vert** est une image uniforme où tous les pixels ont une même valeur élevée. La moyenne sera cette valeur et l'écart-type sera nul (pas de contraste).

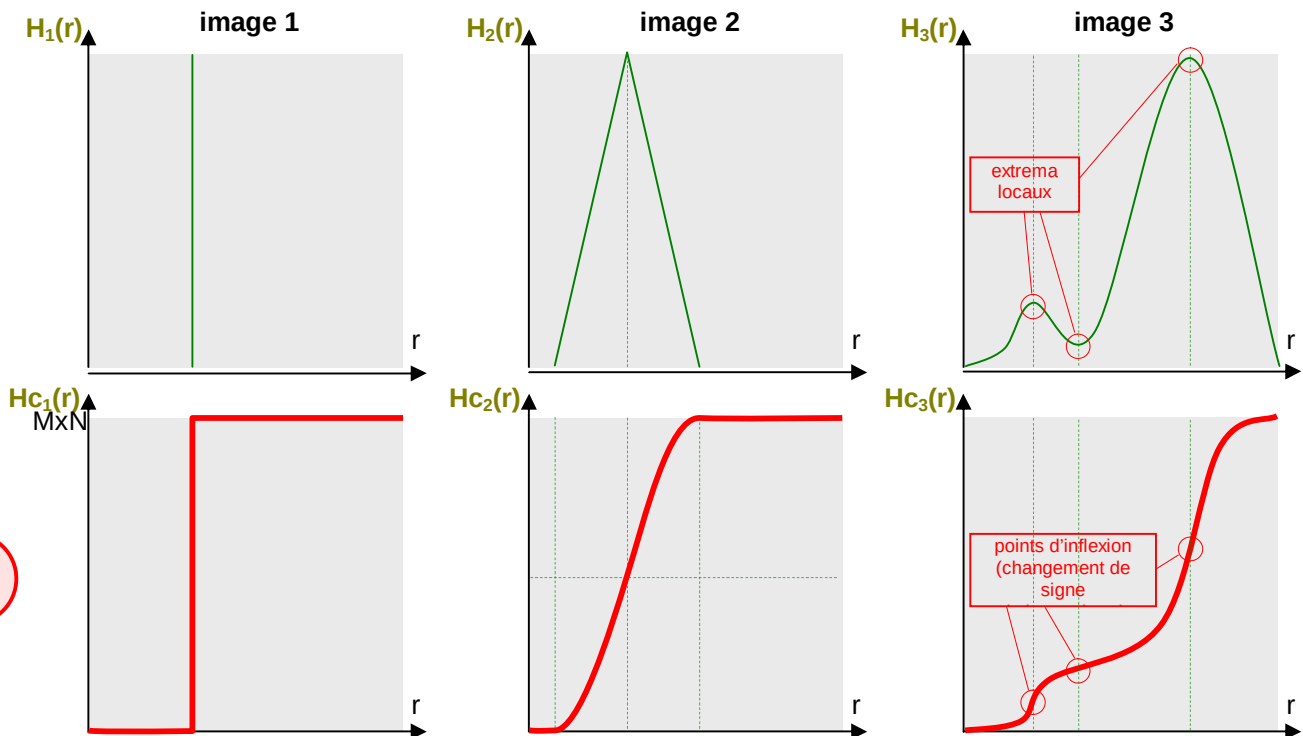
Le **canal bleu** présente une moyenne élevée (image claire) et un écart-type élevé (image contrastée). On note une saturation par excès (pic à droite de l'histogramme).

La couleur dominante de la **composition colorée** sera le cyan (complémentaire du rouge).

3

3. Histogrammes cumulés

Soit les histogrammes H_i des trois images ci-dessous, estimer au mieux (en le dessinant) l'histogramme cumulé H_{c_i} correspondant.



D'un point de vue mathématique, l'histogramme cumulé H_c est une **primitive** de l'histogramme H .

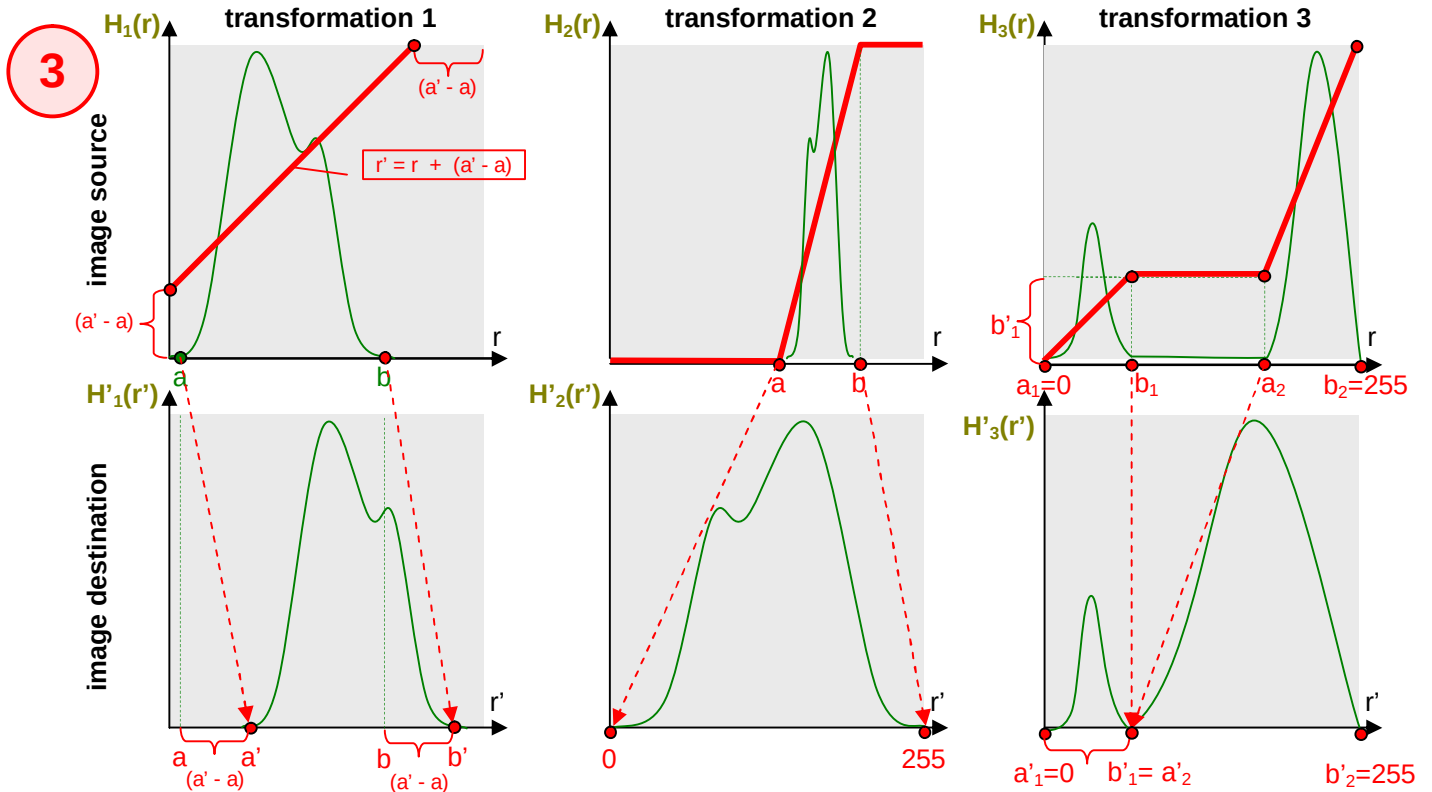
3



Si par exemple H_2 est une fonction linéaire (polynôme de degré 1) alors H_{C_2} est une fonction quadratique (polynôme de degré 2).

4. Retrouver les transformations

Pour chacune des trois images dont l'histogramme H_i est représenté en première ligne, on a effectué une transformation ayant produit une image destination dont l'histogramme H'_i est représenté sur la seconde ligne.



Retrouver les transformations ayant été effectuées. On détaillera la réponse en reportant les points pivots dans les graphiques des histogrammes et en dessinant cette fonction sur les diagrammes de la première ligne (transformation appliquée à l'image source).

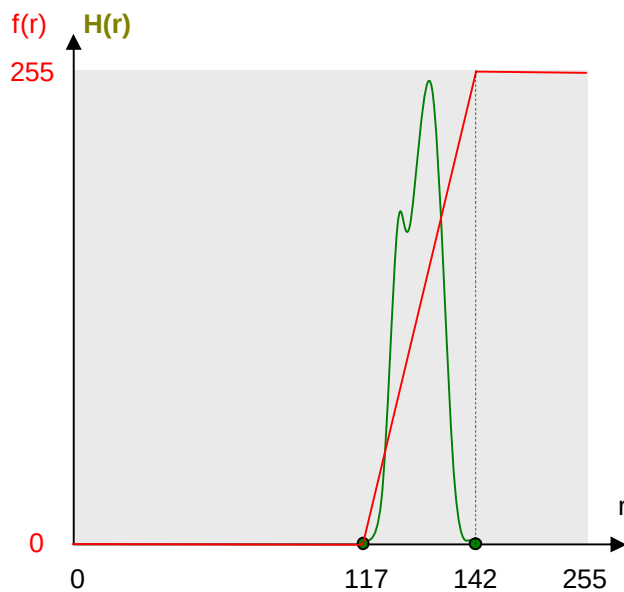
transformation 1	transformation 2	transformation 3
La valeur $(a' - a)$ a simplement été ajoutée à l'image source pour augmenter sa luminosité. $f_1(r) = r + (a' - a)$	Stretching linéaire entre a et b. $f_2(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ 255 \times \frac{(r - a)}{(b - a)} & \text{si } a \leq r \leq b \\ 255 & \text{si } r > b \end{cases}$	Fonction identique entre a_1 et b_1. $f_3(r) = r$ si $r < b_1$ Fonction constante entre b_1 et a_2. $f_3(r) = b'_1$ si $b_1 \leq r < a_2$ Stretching linéaire entre a_2 et b_2. $f_3(r) = b'_1 + (255 - b'_1) \times \frac{(r - a_2)}{(255 - a_2)}$ si $r \geq a_2$



5. Calcul des statistiques de l'image destination

Soit la fonction de stretching linéaire illustrée dans la figure montrant aussi l'histogramme de l'image source.

Sachant que la moyenne $\bar{m}$ de l'image source vaut 129,2 et que l'écart-type σ de l'image source vaut 9,7, calculer en justifiant le développement mathématique la moyenne $\bar{m}'$ et l'écart-type σ' de l'image destination résultant de l'application de ce stretching linéaire.



L'expression mathématique du stretching linéaire entre 117 et 142 est donné par :

$$f(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 117 \\ 255 \times \frac{(r-117)}{25} & \text{si } 117 \leq r \leq 142 \\ 255 & \text{si } r > 142 \end{cases}$$

Or on peut observer d'après l'histogramme que tous les pixels de l'image sont dans l'intervalle [117,142].

L'expression mathématique de la fonction peut donc être réduite à cet intervalle et simplifiée :

$$f(r) = 51 \times \frac{(r-117)}{5}$$

$$f(r) = 10,2 \times r - 1193,4$$

Moyenne de l'image destination

$$\begin{aligned} \bar{m}' &= \frac{1}{\sum_{r=117}^{142} H(r)} \times \sum_{r=117}^{142} H(r) \times f(r) = \frac{1}{\sum_{r=117}^{142} H(r)} \times \sum_{r=117}^{142} H(r) \times (10,2 \times r - 1193,4) \\ &= 10,2 \times \left[\frac{1}{\sum_{r=117}^{142} H(r)} \times \sum_{r=117}^{142} H(r) \times r \right] - 1193,4 \times \left[\frac{1}{\sum_{r=117}^{142} H(r)} \times \sum_{r=117}^{142} H(r) \right] = 10,2 \times \bar{m} - 1193,4 = 10,2 \times 129,2 - 1193,4 \\ \bar{m}' &= 124,44 \end{aligned}$$

Ecart-type de l'image destination

$$\begin{aligned} (\sigma')^2 &= \frac{1}{\sum_{r=117}^{142} H(r)} \times \sum_{r=117}^{142} H(r) \times (f(r))^2 - (\bar{m}')^2 = \frac{1}{\sum_{r=117}^{142} H(r)} \times \sum_{r=117}^{142} H(r) \times (10,2 \times r - 1193,4)^2 - (10,2 \times \bar{m} - 1193,4)^2 \\ &= 10,2^2 \times \left[\frac{1}{\sum_{r=117}^{142} H(r)} \times \sum_{r=117}^{142} H(r) \times r^2 \right] - 2 \times 10,2 \times 1193,4 \times \left[\frac{1}{\sum_{r=117}^{142} H(r)} \times \sum_{r=117}^{142} H(r) \times r \right] + 1193,4^2 \times \left[\frac{1}{\sum_{r=117}^{142} H(r)} \times \sum_{r=117}^{142} H(r) \right] - \\ &\quad 10,2^2 \times \bar{m}^2 + 2 \times 10,2 \times 1193,4 \times \bar{m} - 1193,4^2 \\ &= 10,2^2 \times \left[\frac{1}{\sum_{r=117}^{142} H(r)} \times \sum_{r=117}^{142} H(r) \times r^2 - \bar{m}^2 \right] = 10,2^2 \times \sigma^2 \\ \sigma &= 10,2 \times \sigma = 10,2 \times 9,7 = 98,94 \end{aligned}$$