



CORRIGÉ

EXAMEN

Année 2005-2006

On répondra directement sur les quatre feuilles d'examen en indiquant en pied de page ses NOM et Prénom. L'usage de tout document (exceptée la copie du voisin) est permis.

1. Calcul du skewness

- a. Soit l'histogramme $H(r)$, $r=0..255$, donné pour une image.
Calculer l'expression mathématique du skewness en fonction de $H(r)$.

2

$$\begin{aligned}
 \text{skewness} &= \frac{1}{M.N} \times \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{R(i, j) - \bar{m}}{\sigma} \right]^3 \\
 &= \frac{1}{M.N} \times \frac{1}{\sigma^3} \times \left[\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} R(i, j)^3 - 3 \times \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} R(i, j)^2 \bar{m} + 3 \times \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} R(i, j) \bar{m}^2 - M.N \times \bar{m}^3 \right] \\
 &= \frac{1}{M.N} \times \frac{1}{\sigma^3} \times \left[\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} R(i, j)^3 - 3\bar{m} \times \left(\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} R(i, j)^2 - \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} R(i, j) \bar{m} \right) - M.N \times \bar{m}^3 \right] \\
 &= \frac{1}{M.N} \times \frac{1}{\sigma^3} \times \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} R(i, j)^3 - \frac{3\bar{m}}{\sigma} - \frac{\bar{m}^3}{\sigma^3} \\
 &= \frac{1}{M.N} \times \frac{1}{\sigma^3} \times \sum_{r=0}^{255} H(r) \times r^3 - \frac{3\bar{m}}{\sigma} - \frac{\bar{m}^3}{\sigma^3}
 \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \bar{m} &= \frac{1}{M.N} \times \sum_{r=0}^{255} H(r) \times r \\
 \sigma &= \sqrt{\left(\frac{1}{M.N} \times \sum_{r=0}^{255} H(r) \times r^2 \right) - \bar{m}^2}
 \end{aligned}$$

- b. Ecrire dans un langage symbolique la section de traitement permettant de calculer la moyenne, l'écart-type et le skewness en une seule passe sur une image de M lignes x N colonnes.

Attention : Contrairement à la question précédente, on suppose ici ne pas encore avoir calculé l'histogramme.

2

```

sum ← 0
sum2 ← 0
sum3 ← 0
Pour i ← 0 à (M-1) Faire
    Pour j ← 0 à (N-1) Faire
        sum ← sum + image[i,j]
        sum2 ← sum2 + image[i,j] * image[i,j]
        sum3 ← sum3 + image[i,j] * image[i,j] * image[i,j]
    FinFaire
FinFaire
m ← sum / (M*N)
σ ← sqrt(sum2 / (M*N) - m²)
skewness ← 1/σ³ * sum3 / (M*N) - 3m / σ - m³ / σ³
    
```

NOM : Prénom :

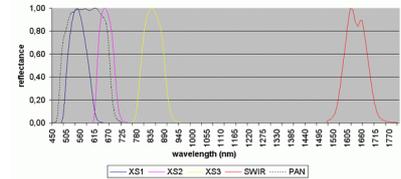
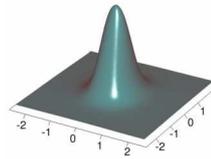


2. Résolution spatiale et résolution spectrale

S'agissant d'un instrument optique, expliquer la différence entre la résolution spatiale et la résolution fréquentielle. Expliquer pourquoi ces performances techniques sont antagonistes. On pourra illustrer son propos de figures.

2 La résolution spatiale mesure la taille du pixel élémentaire au sol (tâche image en figure gauche).

La résolution spectrale mesure la largeur de la fenêtre spectrale pour laquelle la fréquence des photons permettra leur observation par l'instrument.

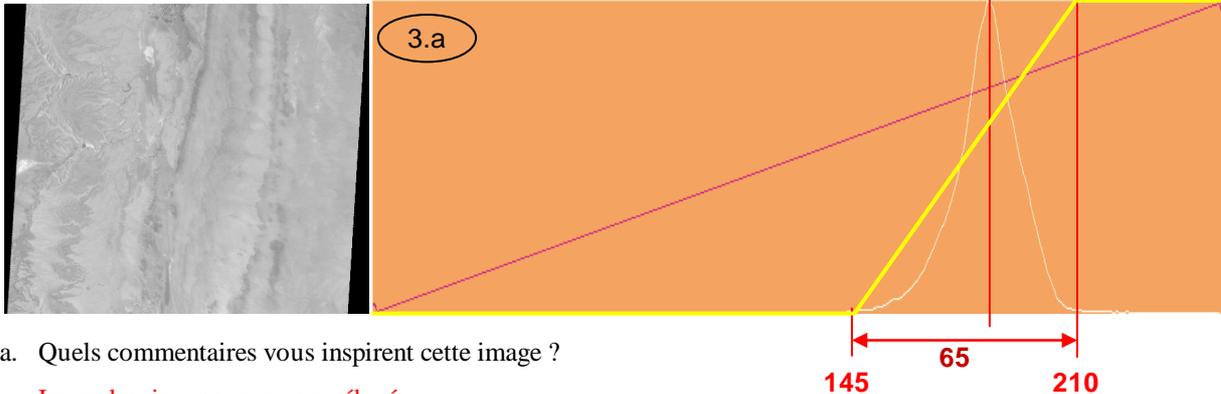


En augmentant la résolution spatiale, moins de photons parviendront du sol et il faudra donc ouvrir la fenêtre spectrale, diminuant par là même la résolution spectrale, pour maintenir un bon rapport signal sur bruit.

Inversement, en augmentant la résolution spectrale, moins de photons arriveront dans l'instrument et il faudra donc ouvrir le « cône de visée », diminuant par là même la résolution spatiale.

3. Retrouver le traitement

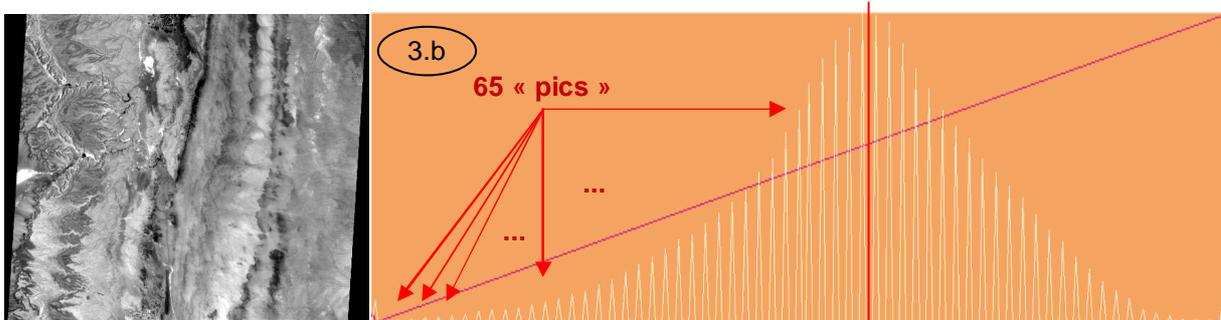
Soit l'image 8-bits non signés et son histogramme :



a. Quels commentaires vous inspirent cette image ?

- 2 Image lumineuse : moyenne élevée.
- Image peu contrastée : écart-type faible.
- Présence de pixels de background (à ne pas comptabiliser dans les statistiques).
- Histogramme unimodal.
- Skewness négatif : histogramme balancé vers la droite.

Après un traitement radiométrique, l'image et son histogramme ont l'apparence suivante :



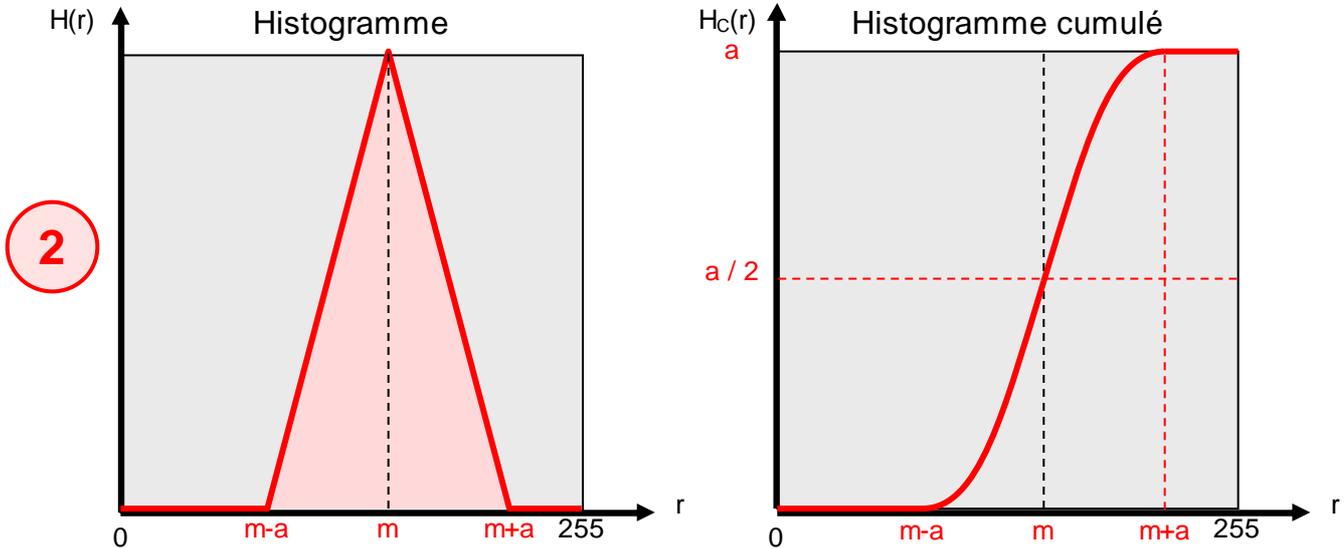
b. Quel traitement a été effectué ? On s'efforcera de retrouver les valeurs numériques des paramètres du traitement qu'on reportera sur la figure 3.a.

- 2 Un stretching linéaire a été opéré entre les valeurs 145 et 210 (largeur de 65 comptes numériques).
- L'image traitée est plus contrastée et moins lumineuse.



4. Transformée « chapeau pointu »

On désire transformer la radiométrie d'une image afin d'adapter son histogramme selon la forme suivante :



a. Dessiner ci-dessus l'histogramme cumulé $H_C(r)$.

b. Ecrire dans un langage symbolique le programme permettant d'initialiser l'histogramme cumulé $H_C(r)$ de la distribution « chapeau pointu » définie sur 256 valeurs.

3

```
INCREMENT ← 1 (ou n'importe quelle valeur)
delta ← 0
Pour r ← 0 à 255 Faire
  Si (r < m-a) Alors
    Hc(r) ← 0
  Sinon
    Si (r < m) Alors
      Hc(r) ← Hc(r-1) + delta
      delta ← delta + INCREMENT
    Sinon
      Si (r < m+a) Alors
        Hc(r) ← Hc(r-1) + delta
        delta ← delta - INCREMENT
      Sinon
        Hc(r) ← Hc(r-1)
    Fsi
  Fsi
Fsi
FinFaire
```



- c. Une autre manière de calculer l'histogramme cumulé consiste à trouver son expression mathématique. Attention : cette question est indépendante de la question b précédente.

2

0. Posons $\text{Max}[H(r)] = 1$

$$H(r) = \begin{cases} 0 & \text{pour } r \in [0, m-a] \\ \frac{r-(m-a)}{a} = \frac{r}{a} - \frac{m-a}{a} & \text{pour } r \in [m-a, m] \\ 1 - \frac{r-m}{a} = -\frac{r}{a} + \frac{m+a}{a} & \text{pour } r \in [m, m+a] \\ 0 & \text{pour } r \in [m+a, 255] \end{cases}$$

1. En intégrant $H(r)$:

$$H_c(r) = \begin{cases} H_{c1}(r) = 0 \\ H_{c2}(r) = A + \frac{r^2}{2a} - \frac{m-a}{a} \times r \\ H_{c3}(r) = B - \frac{r^2}{2a} + \frac{m+a}{a} \times r \\ H_{c4}(r) = C \end{cases}$$

2. Le raccordement en $(m-a)$ impose :

$$\begin{aligned} H_{c1}(m-a) = H_{c2}(m-a) &\Rightarrow 0 = A + \frac{(m-a)^2}{2a} - \frac{m-a}{a} \times (m-a) \\ &\Rightarrow A = \frac{(m-a)^2}{2a} \end{aligned}$$

3. Le raccordement en m impose :

$$\begin{aligned} H_{c2}(m) = H_{c3}(m) &\Rightarrow \frac{(m-a)^2}{2a} + \frac{m^2}{2a} - \frac{m-a}{a} \times m = B - \frac{m^2}{2a} + \frac{m+a}{a} \times m \\ &\Rightarrow B = \frac{-m^2 - 2am + a^2}{2a} \end{aligned}$$

4. Le raccordement en $(m+a)$ impose :

$$\begin{aligned} H_{c3}(m+a) = H_{c4}(m+a) &\Rightarrow C = \frac{-m^2 - 2am + a^2}{2a} - \frac{(m+a)^2}{2a} + \frac{m+a}{a} \times (m+a) \\ &\Rightarrow C = a \end{aligned}$$

- d. Ecrire dans un langage symbolique la section de traitement permettant d'adapter l'histogramme $H'(r)$ d'une image 16 bits non signés sur l'histogramme « chapeau pointu » $H(r)$. L'image traitée devra elle-aussi être représentée sur 16 bits non signés en gardant proportionnellement la forme du « chapeau pointu ».

L'histogramme $H'(r)$ de l'image est supposé avoir été calculé mais pas son histogramme cumulé $H'_c(r)$.

L'histogramme cumulé $H_c(r)$ du modèle « chapeau pointu » est supposé avoir déjà été calculé (voir 4.b).

3

Calculer l'histogramme cumulé de l'image

```
H'_c(0) ← H'(0)
Pour r ← 1 à 65535 Faire
    H'_c(r) ← H'_c(r-1) + H'(r)
FinFaire
```

Calculer la LUT de transformation

```
r ← 0
Pour r' ← 0 à 65535 Faire
    Tant que (r < 254) et (H_c(r)/H_c(255) < H'_c(r')/H'_c(65535)) Faire
        r ← r + 1
    FinFaire
    LUT[r'] ← r * 256
FinFaire
```

Appliquer la LUT à l'image

```
Pour i ← 0 à (M-1) Faire
    Pour j ← 0 à (N-1) Faire
        image_traitée[i,j] ← LUT[image_origine[i,j]]
    FinFaire
FinFaire
```