

Le problème des courbes intercalaires dans la construction d'un MNT maillé à partir des courbes de niveau.

Gil Gonçalves, Patrick Julien

Laboratoire Matis, Institut Géographique National
2 Avenue Pasteur, 94165 Saint-Mandé, France
{gil.goncalves,patrick.julien}@ign.fr

Serge Riazanoff, Bernard Cervelle

Université de Marne-la-Vallée
5 Boulevard Descartes, 77454 Marne-la-Vallée cedex 2, France
{riazano,cervelle}@univ-mlv.fr

Abstract

Fitting an elastic grid to contour lines produces a surface with tighter intermediate contours than the initial ones. This leads to intermediate contours which do not match the initial ones. In this paper, we propose a method for correcting this defect, by fitting the elastic grid to supplementary constraint lines which correspond approximately to the terrain morphologic lines (ridges and drainages). We extract these lines from a Delaunay triangulation conform to the contour lines. We propose a coherent weighting system for the constraints imposed on the elastic grid. Finally, we show that a DTM artifact of the type observed here can be detected by a simple criterion such as the contour length.

Résumé

Lorsqu'on cherche à ajuster une grille élastique sur des courbes de niveau, on observe que la surface obtenue est plus "tendue" entre les courbes qu'au passage de celles-ci. Ce défaut se traduit par des courbes intercalaires incohérentes avec les courbes originelles. Il est corrigé en appuyant la grille sur des lignes de contrainte correspondant à peu près aux lignes caractéristiques (crêtes et talwegs) du terrain. Nous montrons aussi qu'un défaut d'un MNT du type observé ici peut être mis en évidence grâce à un critère numérique simple tel que la longueur des courbes de niveau.

Keywords: Contour lines, terrain portrayal, morphologic lines, elastic grid, DTM

Mots Clés: Courbes de niveau, figuré du terrain, lignes caractéristiques, grille élastique, MNT

1. Position du problème

Dans le cadre de la recherche sur les qualités cartographiques des modèles numériques de terrain (MNT) nous avons été amenés à reconsidérer le problème de la construction d'un modèle à mailles carrées régulières à partir de courbes de niveau (CN), étant entendu que nous disposons déjà pour cette construction d'une méthode dite "grille élastique" [D'Autume, 1978]. Cette méthode sert à ajuster une surface "élastique" (rigide, mais souple) sur un échantillon fini de points. La condition d'élasticité est destinée en premier lieu à empêcher, *quel que soit l'échantillon*, l'indétermination du problème; mais elle a aussi l'avantage de fournir une surface lisse. La grille élastique est l'équivalent discret de la apline plaque-mince [Duchon, 1976].

Pour ajuster une grille élastique sur des courbes de niveau (en fait des lignes polygonales) qui sont des données continues, il faut d'abord se ramener à un échantillon fini de points. Le premier réflexe est de prélever ces points directement sur les CN, bien entendu avec un intervalle de prélèvement assez petit pour que l'échantillon soit représentatif. Un tel échantillon apparaît satisfaisant tant qu'on se borne à contrôler la surface ajustée en superposant les CN dont on est parti avec les CN correspondantes de la surface: la superposition est parfaite. L'échantillon

apparaît moins satisfaisant si on trace les courbes de niveau intercalaires de la surface ajustée: celles-ci sont plus "tendues" que les courbes initiales, et ce phénomène est particulièrement visible sur les crêtes et dans les thalwegs (Fig. 1-b). De telles courbes intercalaires sont inacceptables car elles contredisent le principe du figuré en CN, qui veut qu'on puisse toujours considérer que la pente entre deux courbes normales ou intercalaires est régulière [Carré, 1971].

La localisation des défauts observés indique qu'il a manqué sur les crêtes et dans les thalwegs des informations contraignant l'ajustement de la surface ajustée. On peut donc se douter que la correction de ces défauts va passer par l'apport d'informations supplémentaires. Nous montrons au §-2 qu'il est possible d'extraire ces informations supplémentaires des CN elles-mêmes, parce qu'elles y figurent déjà implicitement. Nous nous en servons pour construire une surface correcte.

En complément, nous montrons au §-3 qu'on peut détecter de façon simple si une surface présente ou non les artefacts décrits plus haut, en confrontant les longueurs des CN initiales et des intercalaires.

2. Solution: contraintes sur les lignes de crête et de talweg

2.1 Description de la grille élastique

La méthode de la grille élastique a pour but d'ajuster une fonction $H(X, Y)$, représentant le MNT, sur un échantillon de points $\{(X_i, Y_i, Z_i) ; i = 1, \dots, n\}$. La fonction H est supposée définie au moyen d'une fonction d'interpolation sur un maillage carré régulier. Dans cet article, nous la supposons bicubique par morceaux, définie par:

$$H(X, Y) = \sum_{c=1}^N \sum_{l=1}^M U\left(\frac{X}{h} - c\right) U\left(\frac{Y}{h} - l\right) z_{c,l} \quad (1)$$

où N, M sont le nombre de colonnes et de lignes du maillage, h son pas et $U(t)$ la fonction paire d'interpolation cubique par morceaux

$$U(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 4t + 2 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{si } t \geq 2 \end{cases} \quad (2)$$

La grille élastique consiste à définir H comme la fonction qui minimise la quantité

$$E(H) = E_c(H) + E_v(H) \quad (3)$$

$$E_c = \sum_{i=1}^n w_i [H(X_i, Y_i) - Z_i]^2 \quad (4)$$

$$E_v = \frac{1}{h^2} \left[\sum_{c,l} K_1(c,l)^2 + \sum_{c,l} K_2(c,l)^2 + \frac{1}{8} \sum_{c,l} K_3(c,l)^2 \right] \quad (5)$$

Dans l'Eq. 4 w_i est un poids ($w_i > 0$) associé au point (X_i, Y_i, Z_i) sur lequel nous reviendrons au §.2.2. Dans l'Eq. 5 $K_1 = z_{c-1,l} - 2z_{c,l} + z_{c+1,l}$, $K_2 = z_{c,l-1} - 2z_{c,l} + z_{c,l+1}$, $K_3 = z_{c-1,l-1} - z_{c-1,l+1} - z_{c+1,l-1} + z_{c+1,l+1}$ et E_v mesure la "courbure moyenne quadratique" de la surface H .

Notons que l'introduction du terme E_v permet de garantir l'existence d'une solution et d'une seule quel que soit l'échantillon, alors que la minimisation de E_c seul admet une infinité de solutions lorsque $NM > n$ (plus de noeuds que de points d'échantillon).

Le fait d'avoir un échantillon formé par des CN nous permet d'imposer à la surface H de satisfaire en chaque noeud (c, l) les contraintes-égalités $Z_1(c, l) \leq z_{c,l} \leq Z_2(c, l)$, où $Z_1(c, l)$, $Z_2(c, l)$ sont les altitudes des deux CN encadrant le noeud.

2.2 Choix des poids

Les poids w_i de l'eq. 4 règlent l'importance qu'on veut accorder à chaque point (X_i, Y_i, Z_i) par rapport aux autres, mais aussi l'importance du critère d'ajustement de l'échantillon E_c par rapport au

critère de courbure E_v . Pour dissocier ces deux rôles il est préférable d'écrire $E = \lambda E_c + E_v$ avec $E_c = \sum_i \mu_i (H(X_i, Y_i) - Z_i)^2$ et $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$. Dans ces conditions un système cohérent de poids w_i nous semble devoir être défini par

$$w_i = \lambda \frac{|V_i|}{\sum_{j=1}^n |V_j|} \quad (6)$$

où $|V_i|$ est l'aire du polygone de Voronoï associé au point (X_i, Y_i) et λ un paramètre qui fixe l'importance du critère E_c par rapport au critère E_v .

2.3 Recherche dans les CN des lignes de contrainte estimant les crêtes et les talwegs

On a observé au §.1 qu'une condition nécessaire pour résoudre le problème des courbes intercalaires devait être de contraindre la surface à l'aide d'informations supplémentaires. L'idée la plus immédiate est de contraindre la surface en adjoignant à l'échantillon de nouveaux points, situés là où le problème se manifeste, c'est-à-dire à proximité des crêtes et des talwegs; les altitudes de ces points doivent bien sûr respecter la condition de pente régulière entre les CN.

Il est possible de retrouver les lignes de crêtes et de talwegs dans les CN car bien que non explicites, elles y sont présentes: ces lignes sont sensiblement des lieux où la surface est plus courbée à l'autre des points de courbure maximale ou de rebroussement.

En pratique nous traçons les lignes de crête et talwegs à l'aide d'une triangulation de Delaunay conforme aux CN [Shewchuk, 1996], dans laquelle ces crêtes et talwegs sont caractérisés par la présence des triangles horizontaux. Notre méthode est alors d'estimer ces lignes par les axes médians de chaque polygone réunion d'un bloc de triangles horizontaux contigus.

Comme n'avons pas besoin, pour notre application, de trouver l'axe médian précis, nous nous contentons de l'estimer par la ligne polygonale joignant les milieux des côtés communs à deux triangles. Cette ligne est complétée à chaque extrémité de façon à relier deux courbes de niveau. Les altitudes des points de la ligne sont interpolées linéairement en fonction de l'abscisse curviligne.

2.4 Mise en oeuvre

La Fig. 1 illustre la mise en oeuvre des principes exposés précédemment dans le cas d'un terrain réel. La Fig. 1-a reproduit les courbes de niveau initiales, d'équidistance 5m, obtenues par restitution photogrammétrique. On a prélevé sur les courbes un échantillon représentatif de points, et ajusté sur cet échantillon une surface par la méthode de la grille élastique. La Fig. 1-b représente les courbes

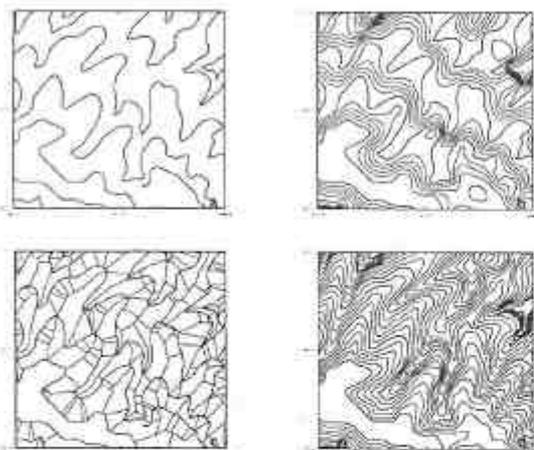


Figure 1: Le problème des courbes intercalaires et sa solution. a) CN initiales; b) CN du MNT sans lignes de contrainte; c) CN initiales complétées par les lignes de contrainte; d) CN du MNT avec lignes de contrainte.

de niveau d'équidistance 1m de la surface ajustée, avec des intercalaires trop tendues et qui n'épousent pas les courbes initiales; ces intercalaires traduisent des pentes irrégulières entre les courbes initiales et contredisent donc le principe du figuré en courbes de niveau. La Fig. 1-c montre les "lignes de contrainte" obtenues par l'intermédiaire d'une triangulation contrainte aux courbes initiales (certaines de ces lignes approximent les lignes de crête et talweg). Sur ces lignes de contrainte, on a prélevé un échantillon complémentaire de points, puis ajusté sur l'échantillon total à nouveau une surface par la méthode de la grille élastique, dont la Fig. 1-d représente les courbes de niveau. Les courbes intercalaires épousent cette fois parfaitement les courbes initiales, et deviennent indiscernables.

3. Evaluation numérique de la cohérence entre courbes initiales et intercalaires

Le fait que les courbes intercalaires incorrectes apparaissent plus tendues, donc plus courtes que les courbes initiales, suggère que des critères tels qu'une "courbure moyenne" ou la longueur des courbes doivent être capables de révéler les anomalies. Ceci est confirmé par la figure 2 qui montre des histogrammes de la longueur des courbes.

L'histogramme 2-a est relatif à une surface incorrecte; on voit que les longueurs des courbes intercalaires sont globalement en désaccord avec celles des courbes initiales; d'autre part la forme en "U" entre deux courbes initiales montre que les longueurs sont d'autant moins cohérentes que les intercalaires s'éloignent des courbes initiales.

Bulletin SFPT n° 153 (1999-1)

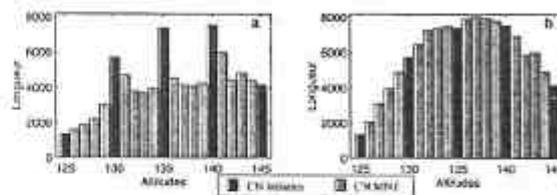


Figure 2: Evaluation de la cohérence entre courbes initiales et intercalaires: a) Longueur des CN du MNT de la figure 4-b; b) Longueur des CN du MNT de la figure 4-d.

L'histogramme 2-b est relatif à une surface correcte; on voit que les longueurs varient plus régulièrement, comme il est logique de s'y attendre. On peut même préciser que si l'interpolation entre courbes de niveau était parfaitement linéaire, on devrait obtenir un histogramme linéaire par morceaux (le terrain étant localement assimilable à un morceau de cône, sur lequel la longueur des courbes de niveau varie linéairement avec l'altitude); en fait on doit s'attendre à un histogramme un peu plus lisse, puisque la grille élastique réalise une interpolation plus lisse que l'interpolation linéaire entre courbes.

4. Conclusions

Les résultats, que nous jugeons satisfaisants nous montrent que l'introduction dans l'échantillon de points prélevés sur les lignes caractéristiques du terrain, en plus de ceux prélevés sur les CN, est une solution possible au problème des courbes intercalaires. S'il fallait perfectionner davantage la méthode, on pourrait penser à améliorer le tracé des lignes de crêtes et de talwegs. Par ailleurs la longueur des CN nous semble un critère propre à mettre en évidence les artefacts d'un MNT liés à la pente.

References

- [Carré, 1971] R. Carré. Figuré du terrain. Cours de l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques, IGN, 1971.
- [D'Autume, 1978] G. Masson D'Autume. Construction du modèle numérique d'une surface par approximations successives: applications aux modèles numériques de terrain. *Bull. SFPT*, (71-71):33-41, 1978.
- [Duchon, 1976] J. Duchon. Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces. *R.A.I.R.O. Analyse Numérique*, pages 5-12, 1976.
- [Shewchuk, 1996] Jonathan Shewchuk. Triangle: engineering a 2d quality mesh generator and delaunay triangulator. Dans *Frist Workshop on Applied Computational Geometry, ACM*, pages 124-133, 1996.