Méthodes et modélisation pour l'optimisation

L'algorithme du simplexe, exemple

Université Paris-Est, Marne-la-Vallée, Master 1 informatique
2016–2017

1 Exemple 1

- Appliquer l'algorithme du simplexe, en utilisant la variable de plus petit indice comme pivot en cas de choix.

Programme linéaire :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } & x_1 + x_2 \\ \text{sous les contraintes } & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1.1 Réécriture sous forme équationnelle

- On introduit une variable d'écart pour chaque inégalité (sauf pour les contraintes de non-négativité).

Forme équationnelle :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } & x_1 + x_2 \\ \text{sous les contraintes } & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

1.2 Solution initiale

- La base $\{x_3, x_4\}$ correspond à la solution faisable basique $(0, 0, 4, 3)$.
- Le tableau associé à cette solution :

$$\begin{array}{ccccc} x_3 & = & 4 & -2x_1 & -x_2 \\ x_4 & = & 3 & -x_1 & -2x_2 \\ \hline z & = & 0 & +x_1 & +x_2 \end{array}$$

1.3 Pivot 1

- x_1 a le plus petit indice (parmi les variables hors base), donc x_1 entre dans la base.
- L'équation $x_3 = \dots$ est ***la plus contraignante***, donc x_3 sort de la base.
- On exprime x_1 en termes des variables hors base en utilisant l'équation de x_3 du tableau : $x_3 = 4 - 2x_1 - x_2 \iff x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$.
- On substitue $x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$ dans les autres équations :

$$x_4 = 3 - x_1 - 2x_2 = 3 - (2 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3) - 2x_2 = 1 - \tfrac{3}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3$$
$$z = 0 + x_1 + x_2 = 0 + (2 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3) + x_2 = 2 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3.$$

- Le tableau devient :

$$\begin{array}{rclll} x_1 & = & 2 & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 \\ x_4 & = & 1 & -\frac{3}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_3 \\ \hline z & = & 2 & +\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 \end{array}$$

- La base $\{x_1, x_4\}$ correspond à la solution faisable basique $(2, 0, 0, 1)$.

1.4 Pivot 2

- x_2 entre dans la base (seul choix).
- L'équation $x_4 = \dots$ est ***la plus contraignante***, donc x_4 sort de la base.
- On exprime x_2 en termes des variables hors base en utilisant l'équation de x_4 du tableau : $x_4 = 1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \iff x_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4$.
- On substitue $x_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4$ dans les autres équations :

$$x_1 = 2 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 = 2 - \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}x_3 - \tfrac{2}{3}x_4) - \tfrac{1}{2}x_3 = \tfrac{5}{3} - \tfrac{2}{3}x_3 + \tfrac{1}{3}x_4$$
$$z = 2 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 = 2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}x_3 - \tfrac{2}{3}x_4) - \tfrac{1}{2}x_3 = \tfrac{7}{3} - \tfrac{1}{3}x_3 - \tfrac{2}{3}x_4.$$

- Le tableau devient :

$$\begin{array}{rclll} x_1 & = & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3}x_3 & +\frac{1}{3}x_4 \\ x_2 & = & \frac{2}{3} & +\frac{1}{3}x_3 & -\frac{2}{3}x_4 \\ \hline z & = & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3}x_3 & -\frac{2}{3}x_4 \end{array}$$

- La base $\{x_1, x_2\}$ correspond à la solution faisable basique $(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$.

1.5 Terminaison

- Les coefficients des variables hors bases (x_3 et x_4) sont négatifs, donc c'est fini.
- Une solution optimale est $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ avec l'optimum $\frac{7}{3}$.
- Une solution optimale au programme linéaire initial est $(x_1, x_2) = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$.