

Méthodes et modélisation pour l'optimisation

M1 informatique, 2018–2019

02 — Modélisation programmation linéaire

UP

EM

UNIVERSITÉ PARIS-EST
MARNE-LA-VALLÉE



INSTITUT D'ÉLECTRONIQUE
ET D'INFORMATIQUE
GASPARD-MONGÉ

Un programme linéaire

fonction objectif

variables de décision : x, y

$$\max 150 \cdot x + 100 \cdot y$$

$$10 \cdot x + 10 \cdot y \leq 350$$

$$30 \cdot x + 10 \cdot y \leq 750$$

$$10 \cdot x + 20 \cdot y \leq 600$$

contraintes

$\leq, =, \geq$

contraintes
de non-négativité

$$x, y \geq 0$$

$(x, y \text{ entiers})$

contraintes d'intégralité

attention : la programmation linéaire
en nombres entiers est un problème NP dur !

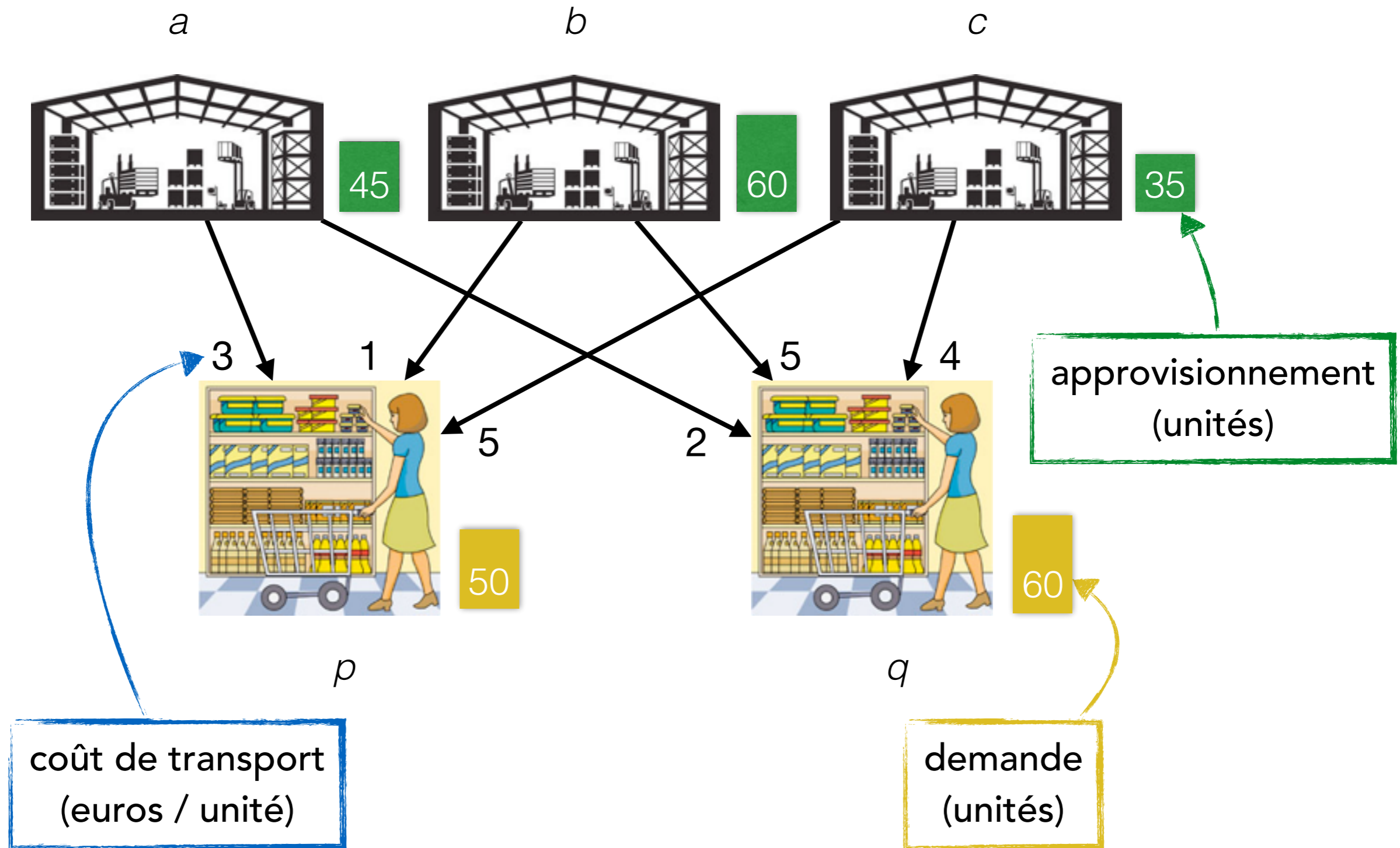
Régime optimisé

- ▶ *Le conseil supérieur d'hygiène publique français (CSHP) souhaite améliorer le contenu en vitamine A, vitamine C et fibre des repas du CROUS. Le CROUS aimerait rectifier ce problème en proposant une entrée à base de carottes, de choux et de cornichons.*
- ▶ Le tableau ci-dessous représente la quantité de vitamines et de fibres prescrite par portion, leur contenu dans les aliments et le prix au kg des aliments.
- ▶ Aider le CROUS à trouver l'entrée la moins chère satisfaisant les contraintes.

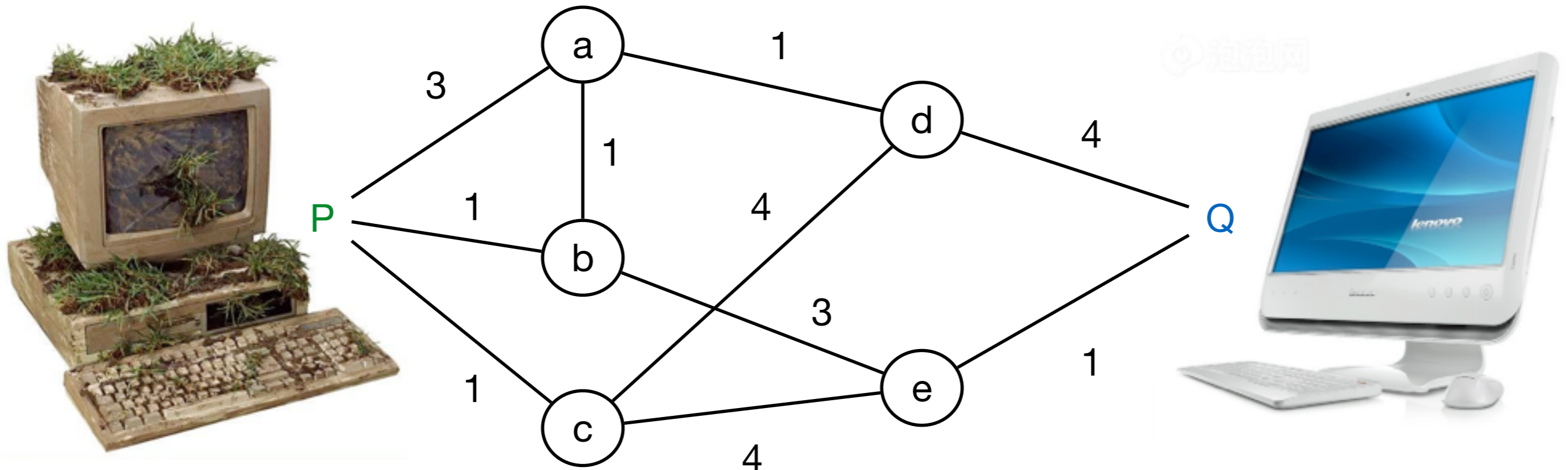
	carotte	choux	cornichon	demande par portion	AJR
Vitamine A (mg/kg)	35	0,5	0,5	0,5 mg	0,8 mg
Vitamine C (mg/kg)	60	300	10	15 mg	80 mg
Fibre (g/kg)	30	20	10	4 g	25 g
coût (€/kg)	0,75	0,50	0,15	-	-

¹Apports journaliers recommandés selon l'Arrêté du 3 décembre 1993 portant application du décret no 93-1130 du 27 septembre 1993 concernant l'étiquetage relatif aux qualités nutritionnelles des denrées alimentaires, annexe 1 modifiée au 24 février 2010.

Problème de transport

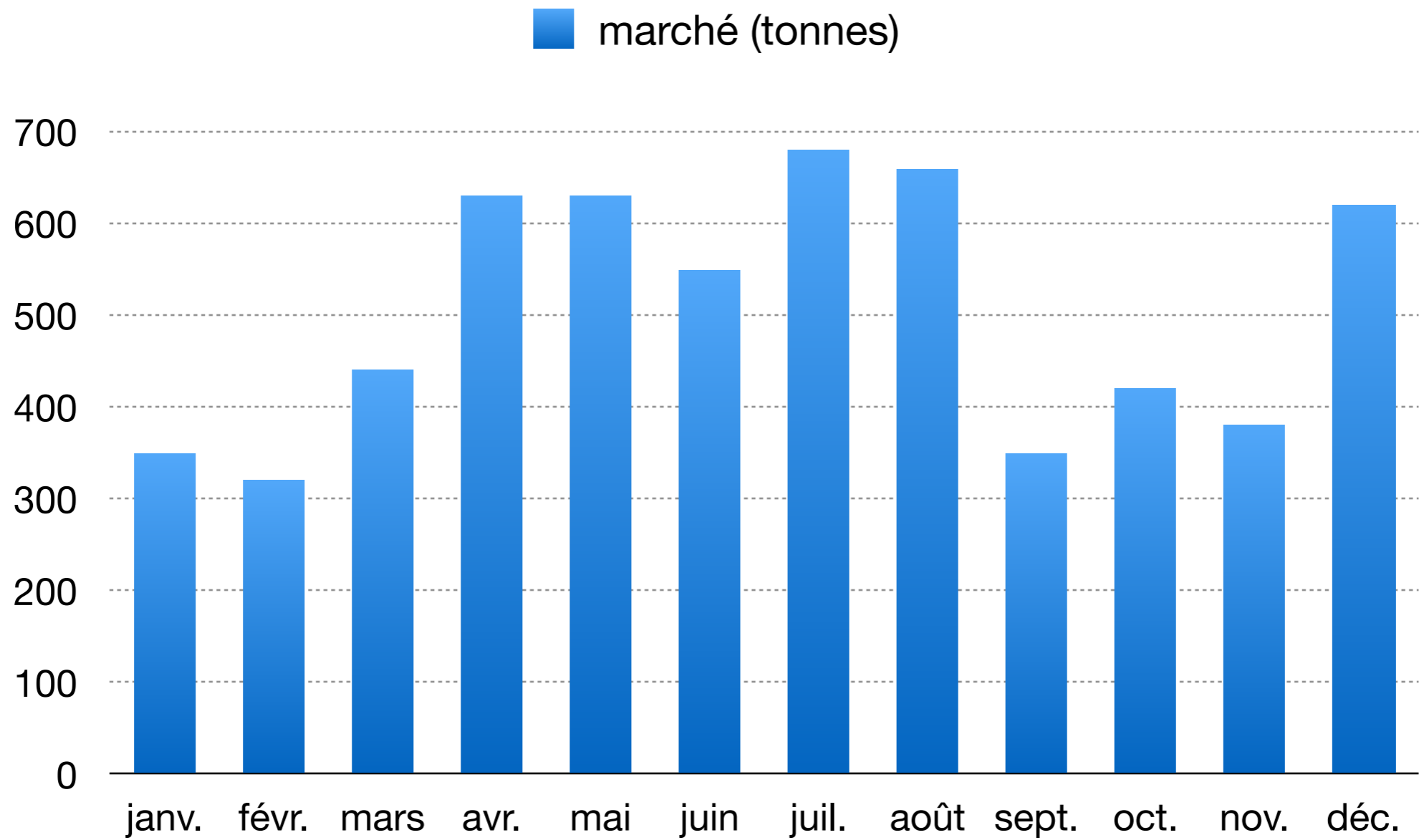


Flot dans un réseau

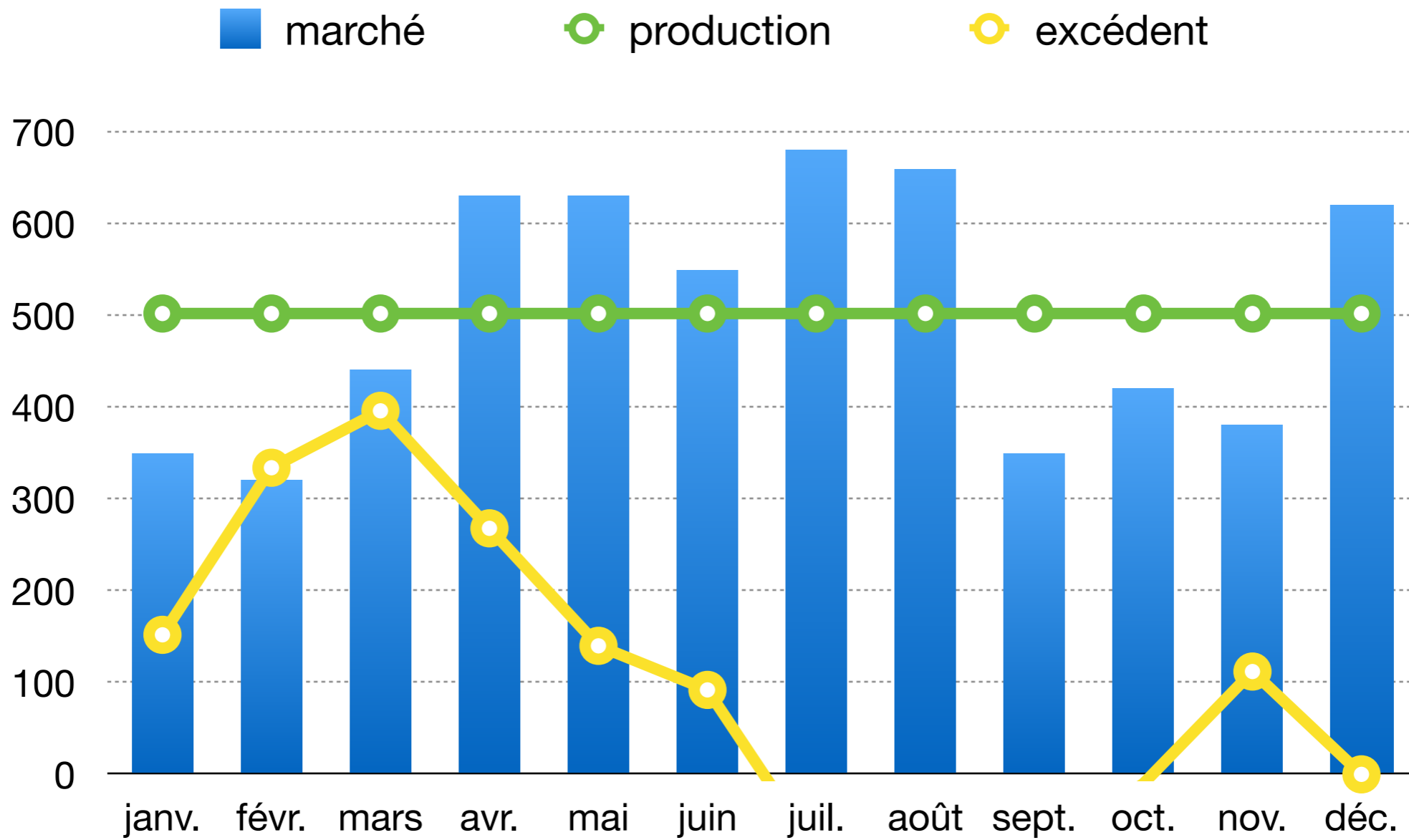


- ▶ On veut transférer les contenus d'un ordinateur P vers un autre, Q.
- ▶ Les nombres sur les liens indiquent leur débit maximum (Mo/s).
- ▶ Chaque lien est bidirectionnel mais ne peut être utilisé que dans un sens à la fois.
- ▶ Quel est le débit maximum de l'ordinateur P vers l'ordinateur Q ?

Le marchand de glace

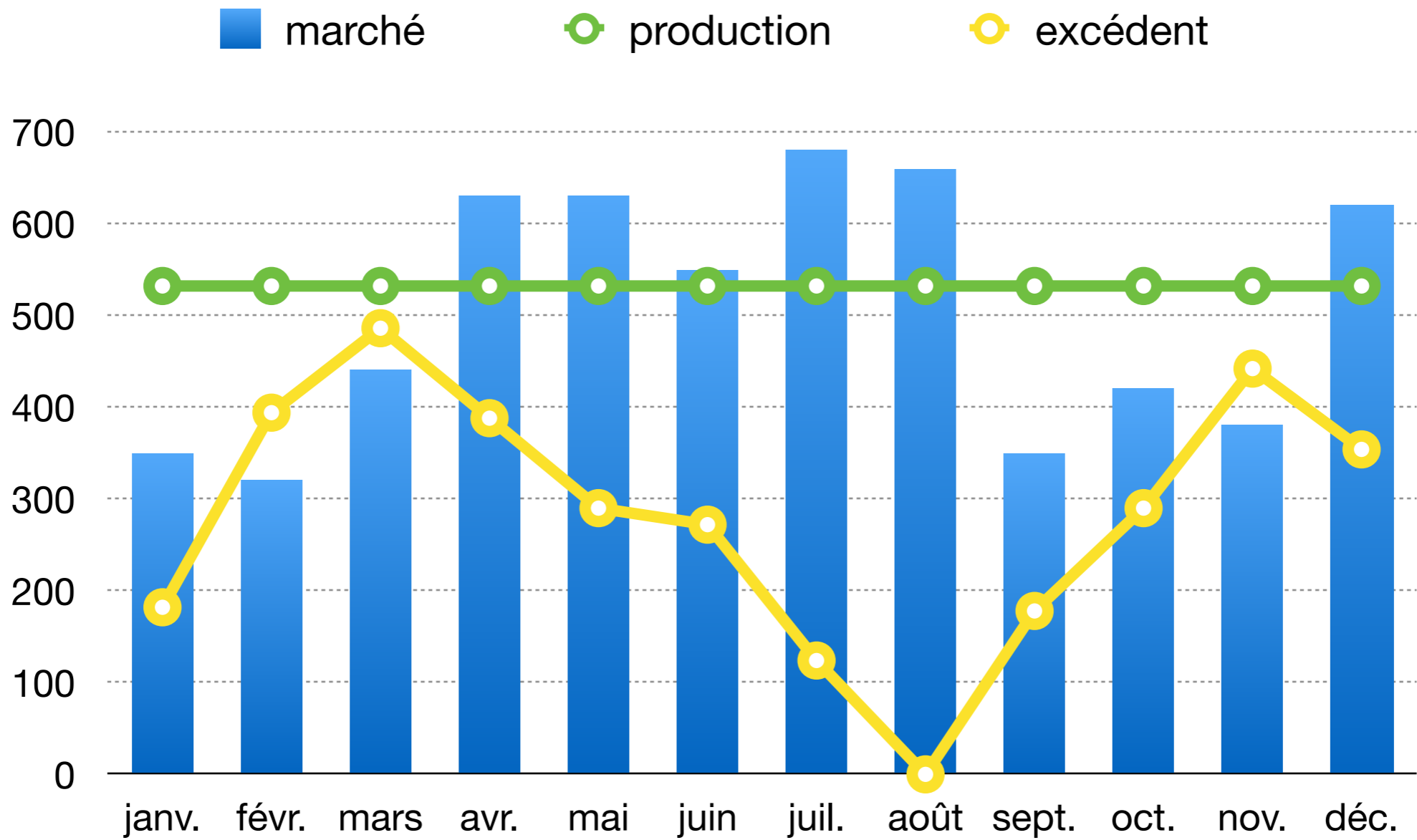


Le marchand de glace



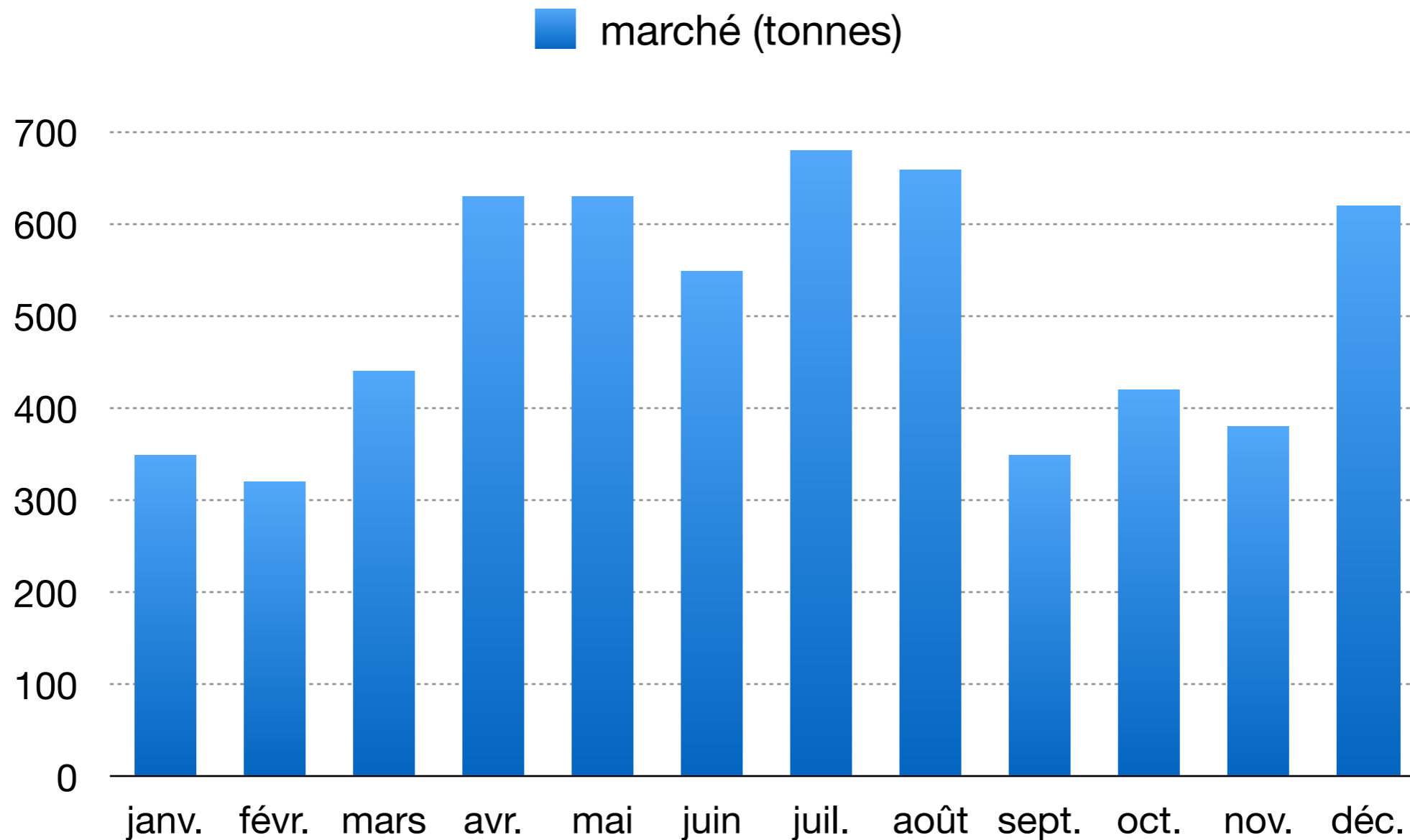
— Déficit de glace en juillet !

Le marchand de glace



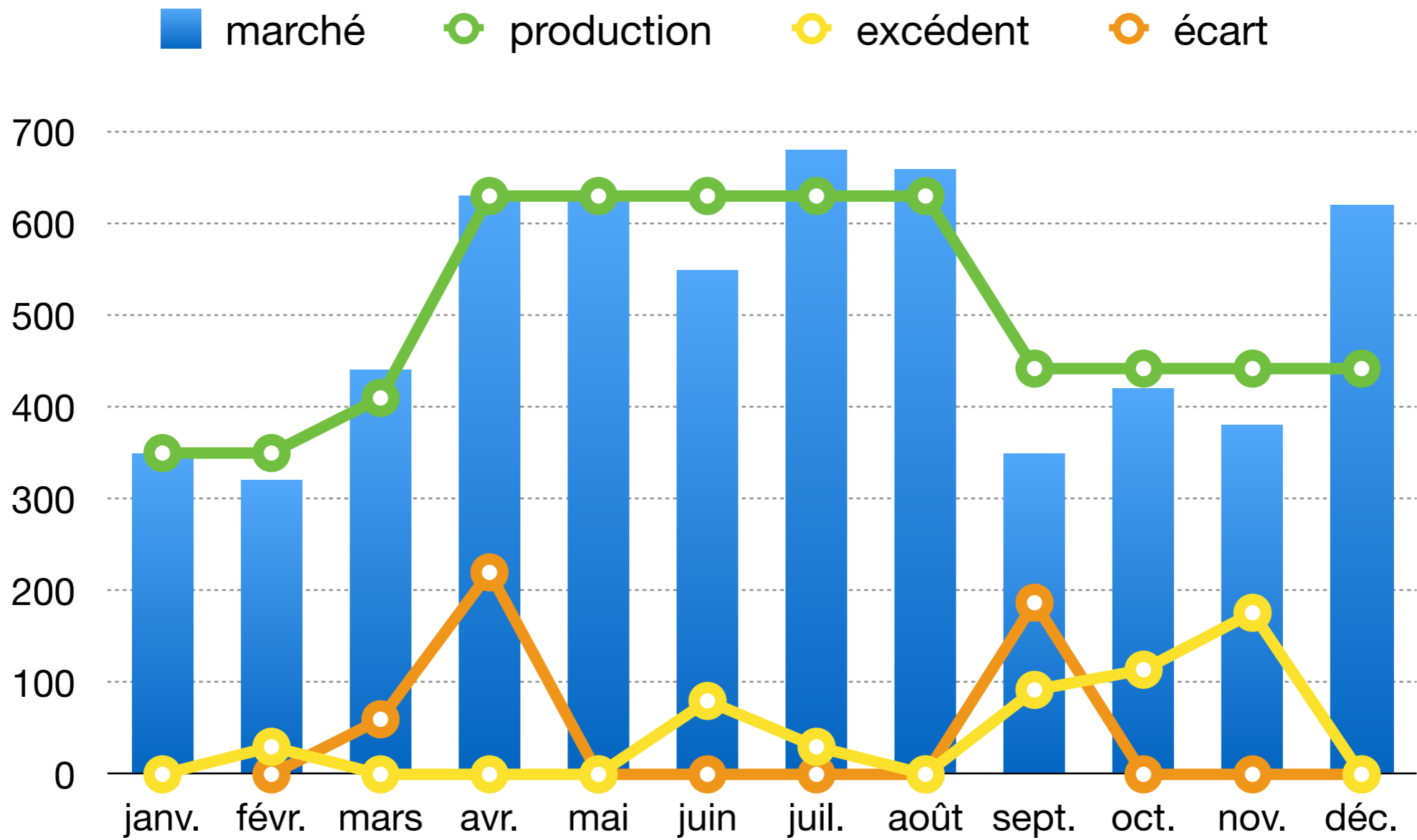
Excédent à la fin de l'année !

Le marchand de glace



- ▶ Un écart de production d'un mois sur l'autre coûte 50€ / tonne.
- ▶ Le stockage de l'excédent coûte 20€ / tonne et mois.
- ▶ Le marchand cherche à minimiser le coût total.

Le marchand de glace



Coût total : 33 875 euros



Problème générique

- ▶ Il y a **n** produits P_1, \dots, P_n qui peuvent être fabriqués
 - ▶ le produit P_j se vend c_j euros, $j = 1, \dots, n$
- ▶ Il y a **m** ressources Q_1, \dots, Q_m utilisées pour la fabrication
 - ▶ la disponibilité de la ressource Q_i est b_i , $i = 1, \dots, m$
- ▶ La production d'une unité du produit P_j utilise une quantité a_{ij} de la ressource Q_i
- ▶ Planifier la production pour **maximiser** les bénéfices
- ▶ *Suppositions*
 - ▶ *on peut vendre tout ce qu'on produit*
 - ▶ *on peut produire des fractions de chaque produit*

Problème générique

$$\text{Max } C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \leq b_1$$

ressource Q_2 \longrightarrow $a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \leq b_2$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \leq b_m$$

produit P_1 \uparrow

$$X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0$$

n produits

m ressources

x_j : unités fabriqués du produit P_j

une unité de P_j utilise une quantité a_{ij} de la ressource Q_i

Problème générique

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n \\ & a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \leq b_1 \\ & a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \leq b_2 \\ & \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ & a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \leq b_m \\ & X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0 \end{aligned}$$

- ▶ une forme générale d'un problème de production
- ▶ permet l'automatisation de la résolution

