Méthodes et modélisation pour l'optimisation
M1 informatique

Examen – jeudi 10 janvier 2019 14h00-16h00

Une feuille recto-verso manuscrite autorisée. Calculatrices, ordinateurs et téléphones portables interdits. Ce sujet comporte 5 questions. La notation prendra en compte le soin apporté à la rédaction.

Pour les questions de modélisation en SAT, vous avez droit d'utiliser les 'macros' AtLeastOne/AtLeast-k et AtMostOne/AtMost-k.

Question 1. La compagnie minière MINEMAX extrait 10 000 tonnes de minerai rouge et 8 000 tonnes de minerai noir par jour. Ceux-ci peuvent être affinés de manières différentes pour produire trois alliages : Souple, Dur et Fort. Pour produire une tonne d'alliage Souple, il faut 3 tonnes de minerai rouge et 2 tonnes de minerai noir. Pour l'alliage Dur, il faut 2 tonnes de minerai rouge et 3 tonnes de minerai noir tandis que pour l'alliage Fort, il faut 3 tonnes de minerai rouge et 3 tonnes de minerai noir. Une tonne d'alliage Souple, Dur et Fort se vend respectivement 300€, 350€ et 400€. On suppose que la compagnie peut vendre tout ce qu'elle produit.

a) La compagnie veut répartir sa production des trois alliages pour maximiser ses revenus. Formuler ce problème comme un programme linéaire.

b) Afin d'assumer une stratégie plus pérenne, la compagnie doit s'assurer que les revenus venant de la vente de chaque alliage représente au moins 10% des revenus totaux. Modifier votre programme pour prendre en compte cette contrainte.

Correction :

(a)

Introduire les variables x_S, x_D, x_F : le nombre de tonnes d'alliage Souple, Dur et Fort.

$$\begin{array}{rrcl}
\text{Maximiser} & 300x_S + 350x_D + 400x_F & & \\
\text{sous les contraintes} & 3x_S + 2x_D + 3x_F & \leq & 10\ 000 \\
& 2x_S + 3x_D + 3x_F & \leq & 8\ 000 \\
& x_S, x_D, x_F & \geq & 0
\end{array}$$

(Comme on veut maximiser $300x_S + 350x_D + 400x_F$, les contraintes de non-négativité ne sont pas obligatoires.)

(b)

Introduire la variable auxiliaire z représentant les revenus.

$$\begin{array}{rrcl}
\text{Maximiser} & z & & \\
\text{sous les contraintes} & z & = & 300x_S + 350x_D + 400x_F \\
& 3x_S + 2x_D + 3x_F & \leq & 10\ 000 \\
& 2x_S + 3x_D + 3x_F & \leq & 8\ 000 \\
& 300x_S & \geq & 0.1z \\
& 350x_D & \geq & 0.1z \\
& 400x_F & \geq & 0.1z \\
& x_S, x_D, x_F, z & \geq & 0
\end{array}$$

Question 2. On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rl} \text{Maximiser} & 11x_1 + 6x_2 + 10x_3 \\ \text{sous les contraintes} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 15 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12 \\ & x_1 + x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

a) Donner une forme équationnelle en introduisant des variables d'écart.

b) Appliquer l'algorithme du simplexe. En cas de choix, la variable du plus grand coefficient entre dans la base (la règle de Dantzig). On prendra soin d'indiquer à chaque étape la base visitée par l'algorithme et la valeur de la fonction objectif.

Correction :

(a)

Introduire trois variables d'écart : x_4, x_5, x_6 pour les trois contraintes.

$$\begin{array}{rl} \text{Maximiser} & 11x_1 + 6x_2 + 10x_3 \\ \text{sous les contraintes} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 12 \\ & x_1 + x_3 + x_6 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

(b) C'est prudent (et fait gagner des points) de vérifier la solution après chaque pivot !

- $x_i \geq 0$ pour tout i ?
- Les équations sont-elles satisfaites par $(x_1, \ldots, x_6)$?
- La valeur de la fonction objectif est-elle correcte ? (comparer z et la valeur obtenue en substituant x_1, x_2, x_3 dans l'expression de la fn obj.)

Sinon, il y a un problème !

Solution initiale

- La base $\{4, 5, 6\}$ correspond à la solution $(0, 0, 0, 15, 12, 3)$.

$$\begin{array}{ccccccc} x_4 & = & 15 & -2x_1 & -3x_2 & -x_3 \\ x_5 & = & 12 & -3x_1 & -3x_2 & -2x_3 \\ x_6 & = & 3 & -x_1 & & -x_3 \\ \hline z & = & 0 & +11x_1 & +6x_2 & +10x_3 \end{array}$$

Pivot 1

- x_1 a le plus grand coefficient parmi les variables hors base ayant un coefficient positif, donc x_1 entre dans la base. x_6 sort de la base.
- La base $\{1, 4, 5\}$ correspond à la solution basique admissible $(3, 0, 0, 9, 3, 0)$.

$$\begin{array}{rcrrrr} x_1 & = & 3 & & -x_3 & -x_6 \\ x_4 & = & 9 & -3x_2 & +x_3 & +2x_6 \\ x_5 & = & 3 & -3x_2 & +x_3 & +3x_6 \\ \hline z & = & 33 & +6x_2 & -x_3 & -11x_6 \end{array}$$

Pivot 2

- x_2 entre dans la base. x_5 sort de la base.
- La base $\{1, 2, 4\}$ correspond à la solution faisable basique $(3, 1, 0, 6, 0, 0)$.

$$\begin{array}{rcrrrr} x_1 & = & 3 & -x_3 & & -x_6 \\ x_2 & = & 1 & +\frac{1}{3}x_3 & -\frac{1}{3}x_5 & +x_6 \\ x_4 & = & 6 & & +x_5 & -x_6 \\ \hline z & = & 39 & +x_3 & -2x_5 & -5x_6 \end{array}$$

Pivot 3

- x_3 entre dans la base. x_1 sort de la base.
- La base $\{2, 3, 4\}$ correspond à la solution faisable basique $(0, 2, 3, 6, 0, 0)$.

$$\begin{array}{rcrrrr} x_2 & = & 2 & -\frac{1}{3}x_1 & -\frac{1}{3}x_5 & +\frac{2}{3}x_6 \\ x_3 & = & 3 & -x_1 & & -x_6 \\ x_4 & = & 6 & & +x_5 & -x_6 \\ \hline z & = & 42 & -x_1 & -2x_5 & -6x_6 \end{array}$$

- Les coefficients des variables hors base (x_1, x_5, x_6) sont négatifs, donc c'est fini.
- **Une solution optimale au programme initial est :**
  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 3)$ avec l'optimum 42.

Question 3. Le roi Tirian (♔) du royaume de Narnia doit affecter ses chevaliers (♘) aux châteaux (♖). Étant un bon souverain, il veut respecter les vœux des chevaliers. En même temps, il a besoin d'affecter au moins un chevalier à chaque château. Les chevaliers, les châteaux et les vœux sont représentés dans le tableau suivant.

	♘1	♘2	♘3	♘4	♘5
♖1	✓			✓	
♖2	✓	✓	✓		✓
♖3		✓	✓	✓	✓
♖4				✓	

Exemple : les vœux du chevalier 4 (♘4) sont les châteaux 1, 3 ou 4 (♖1, ♖3 ou ♖4).

▷ Aidez le roi à modéliser ce problème par une formule SAT.

Correction : Introduire les variables x_{ij}, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ et $j = 1, 2, 3, 4$ où $x_{ij} = 1$ veut dire que le chevalier ♘i est affecté au château ♖j. On ajoute ensuite trois types de contraintes :

- On modélise les vœux avec les 5 clauses suivantes :
  $\mathsf{AtLeastOne}(x_{11}, x_{12})$
  $\mathsf{AtLeastOne}(x_{22}, x_{23})$
  $\mathsf{AtLeastOne}(x_{32}, x_{33})$
  $\mathsf{AtLeastOne}(x_{41}, x_{43}, x_{44})$
  $\mathsf{AtLeastOne}(x_{52}, x_{53})$
- $\mathsf{AtMostOne}(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4})$ pour $i = 1, \ldots, 5$ veut dire que le chevalier ♘i est affecté à **au plus** un château.
- $\mathsf{AtLeastOne}(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}, x_{4j}, x_{5j}$ pour $j = 1, \ldots, 4$ veut dire qu'**au moins** un chevalier est affecté au château ♖j.

Formellement, on modélise une surjection de chevaliers aux châteaux avec des restrictions prescrites sur les images des chevaliers (leurs vœux).

Question 4. L'entreprise Chimico Volantis dispose de 3 usines (U1, U2, U3) pour la fabrication du pesticide Telone. Pour la fabrication, il y a besoin d'un composé chimique (propène) produit sur 4 sites (S1, S2, S3, S4). Le coût de la production de propène sur chaque site est de 5 €/kg pour les 100 premiers kg/semaine, 8 €/kg pour les 100 deuxièmes kg/semaine et 15 €/kg pour tout kg/semaine au-dèla de 200. Le besoin de chaque usine est de 300 kg/semaine et les coûts de transport (entre chaque site de production de propène et chaque usine en €/kg) sont donnés dans le tableau suivant.

	S1	S2	S3	S4
U1	13	11	18	7
U2	2	14	10	1
U3	5	8	18	11

$\triangleright$ Formuler un programme linéaire pour aider l'entreprise à minimiser le coût pour la fabrication de son pesticide.

Correction : Dans un premier temps, on suppose que le coût de production de propène sur chaque site est toujours 5 €/kg. Soit x_{ij}, $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 3$, une variable représentant la quantité (en kg) de propène transporté du site i vers l'usine j par semaine. Alors, à site i, la production doit être $x_i = \sum_{j=1}^{3} x_{ij}$. Soit c_{ij}, $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 3$, le coût (constant venant du tableau) pour transporter un kg de propène du site i vers l'usine j.

Alors, on a le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rrcll} & \text{Minimiser} & & 5 \cdot (\sum_{i=1}^{4} x_i) + (\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} \cdot x_{ij}) & \\ \text{sous les contraintes} & x_i & = & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} & \text{pour } i = 1,2,3,4 \\ & \sum_{i=1}^{4} x_{ij} & \geq & 300 & \text{pour } j = 1,2,3 \\ & x_{ij}, x_i & \geq & 0 & \end{array}$$

Pour prendre en compte le coût progressif de la production de propène, on utilisera trois variables x_i, y_i, z_i sur chaque site $i = 1, 2, 3, 4$ avec les interprétations : x_i est la quantité produite sur site i avec un coût de 5 €/kg, y_i est la quantité produite avec un coût de 8 €/kg et z_i est la quantité produite avec un coût de 15 €/kg. Comme on minimise, une solution optimale utilisera la capacité de x_i avant d'utiliser la capacité de y_i. On obtient le programme linéaire final :

$$\begin{array}{rrcll} & \text{Minimiser} & & 5 \cdot (\sum_{i=1}^{4} x_i) + 8 \cdot (\sum_{i=1}^{4} y_i) + 15 \cdot (\sum_{i=1}^{4} z_i) & \\ & & & +(\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} \cdot x_{ij}) & \\ \text{sous les contraintes} & x_i + y_i + z_i & = & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} & \text{pour } i = 1,2,3,4 \\ & \sum_{i=1}^{4} x_{ij} & \geq & 300 & \text{pour } j = 1,2,3 \\ & x_i & \leq & 100 & \text{pour } i = 1,2,3,4 \\ & y_i & \leq & 100 & \text{pour } i = 1,2,3,4 \\ & x_{ij}, x_i, y_i, z_i & \geq & 0 & \end{array}$$

Question 5. L'objectif du jeu Takuzu est de remplir une grille carrée de taille paire avec des 0 et des 1 en respectant les conditions suivantes :

1. chaque ligne et colonne doit contenir autant de 0 que de 1 ;
2. des lignes ou des colonnes identiques sont interdites ;
3. il ne doit pas y avoir plus de deux 0 ou 1 placés l'un à côté ou en dessous de l'autre.

	1		0
		0	
	0		
1	1		

La grille est partiellement pré-remplie par des 0 et des 1 qui ne doivent pas être modifiés (*la configuration initiale*). Modéliser ce jeu par une formule SAT sur la grille 4 × 4 avec la configuration initiale indiquée ci-dessus.

Correction : Introduire les variables x_{ij} où $x_{ij} = 1$ s'il y a un '1' dans la ligne $i = 1, 2, 3, 4$ (du haut vers le bas), colonne $j = 1, 2, 3, 4$ (de la gauche vers la droite). Il y a quatre types de contraintes :

1. Autant de 0 que de 1 :

   $\mathsf{AtLeast\text{-}2}(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4})$ pour $i = 1, \ldots, 4$
   $\mathsf{AtMost\text{-}2}(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4})$ pour $i = 1, \ldots, 4$
   $\mathsf{AtLeast\text{-}2}(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}, x_{4j})$ pour $j = 1, \ldots, 4$
   $\mathsf{AtMost\text{-}2}(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}, x_{4j})$ pour $j = 1, \ldots, 4$

2. **Une première solution.** Les lignes a et b sont *égales* :

   $$(x_{a1} \leftrightarrow x_{b1}) \wedge (x_{a2} \leftrightarrow x_{b2}) \wedge (x_{a3} \leftrightarrow x_{b3}) \wedge (x_{a4} \leftrightarrow x_{b4}) \equiv$$

   $$\bigvee_{s_1,s_2,s_3,s_4 \in \{0,1\}} (x_{a1} = s_1 \wedge x_{b1} = s_1 \wedge x_{a2} = s_2 \wedge x_{b2} = s_2 \wedge x_{a3} = s_3 \wedge x_{b3} = s_3 \wedge x_{a4} = s_4 \wedge x_{b4} = s_4)$$

   où $x_{ak} = s_k$ signifie le littéral x_{ak} si $s_k = 1$ et le littéral $\neg x_{ak}$ si $s_k = 0$.
   Donc, les lignes a et b sont *différentes* si (par De Morgan) :

   $$\bigwedge_{s_1,s_2,s_3,s_4 \in \{0,1\}} (x_{a1} = s_1 \vee x_{b1} = s_1 \vee x_{a2} = s_2 \vee x_{b2} = s_2 \vee x_{a3} = s_3 \vee x_{b3} = s_3 \vee x_{a4} = s_4 \vee x_{b4} = s_4)$$

   Une deuxième solution. Introduire (pour le couple de lignes a et b) les variables y_j avec l'interprétation $y_j = 1$ si $x_{aj} = x_{bj}$. Alors, on ajoute les contraintes suivantes :

   $$\mathsf{AtLeastOne}(\neg y_1, \neg y_2, \neg y_3, \neg y_4)$$

   Pour s'assurer que $y_j = 1$ si $x_{aj} = x_{bj}$, on ajoute $y_j \leftrightarrow (x_{aj} \leftrightarrow x_{bj}) \equiv$

   $$(y_j \vee x_{aj} \vee x_{bj}), \quad (y_j \vee \neg x_{aj} \vee \neg x_{bj}), \quad (\neg y_j \vee x_{aj} \vee \neg x_{bj}), \quad (\neg y_j \vee \neg x_{aj} \vee x_{bj})$$

3. Pas trois chiffres identiques placés l'un à côté de l'autre (ou l'un en dessous de l'autre) : pour la ligne i,

   $$x_{ij} \vee x_{i(j+1)} \vee x_{i(j+2)}, \quad \neg x_{ij} \vee \neg x_{i(j+1)} \vee \neg x_{i(j+2)} \qquad j = 1, 2$$

   Mais on peut également noter que ces contraintes sont déjà impliquées par les contraintes (1) !

4. La configuration initiale : $x_{12} = 1, x_{14} = 0, x_{23} = 0, x_{32} = 0, x_{41} = 1, x_{42} = 1$.

Fin du sujet