Méthodes et modélisation pour l'optimisation
L'algorithme du simplexe – EXEMPLES

Master 1 informatique, Université Paris-Est, Marne-la-Vallée

- Appliquer l'algorithme du simplexe, ***en utilisant la variable de plus grand coefficient comme pivot*** en cas de choix.

1 Premier exemple

Programme linéaire :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } & x_1 + x_2 \\ \text{sous les contraintes } & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1.1 Réécriture sous forme équationnelle

- On introduit une variable d'écart pour chaque inégalité (sauf pour les contraintes de non-négativité).

Forme équationnelle :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } & x_1 + x_2 \\ \text{sous les contraintes } & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

1.2 Solution initiale

- La base $\{3, 4\}$ correspond à la solution basique admissible $(0, 0, 4, 3)$.
- Le tableau associé à cette solution :

$$\begin{array}{ccccc} x_3 & = & 4 & -2x_1 & -x_2 \\ x_4 & = & 3 & -x_1 & -2x_2 \\ \hline z & = & 0 & +x_1 & +x_2 \end{array}$$

1.3 Pivot 1

- Les coefficients de x_1 et x_2 (les variables hors base) sont égaux. On fait entrer x_1.
- L'équation $x_3 = \dots$ est ***la plus contraignante***, donc x_3 sort de la base.
- On exprime x_1 en termes des variables hors base en utilisant l'équation de x_3 du tableau : $x_3 = 4 - 2x_1 - x_2 \iff x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$.
- On substitue $x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$ dans les autres équations :

$$x_4 = 3 - x_1 - 2x_2 = 3 - (2 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3) - 2x_2 = 1 - \tfrac{3}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3$$

$$z = 0 + x_1 + x_2 = 0 + (2 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3) + x_2 = 2 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3.$$

- Le tableau devient :

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & = & 2 & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 \\ x_4 & = & 1 & -\frac{3}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_3 \\ \hline z & = & 2 & +\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 \end{array}$$

- La base $\{1, 4\}$ correspond à la solution basique admissible $(2, 0, 0, 1)$.

1.4 Pivot 2

- x_2 entre dans la base (seul choix).
- L'équation $x_4 = \dots$ est ***la plus contraignante***, donc x_4 sort de la base.
- On exprime x_2 en termes des variables hors base en utilisant l'équation de x_4 du tableau : $x_4 = 1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \iff x_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4$.
- On substitue $x_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4$ dans les autres équations :

$$x_1 = 2 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 = 2 - \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}x_3 - \tfrac{2}{3}x_4) - \tfrac{1}{2}x_3 = \tfrac{5}{3} - \tfrac{2}{3}x_3 + \tfrac{1}{3}x_4$$

$$z = 2 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 = 2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}x_3 - \tfrac{2}{3}x_4) - \tfrac{1}{2}x_3 = \tfrac{7}{3} - \tfrac{1}{3}x_3 - \tfrac{2}{3}x_4.$$

- Le tableau devient :

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & = & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3}x_3 & +\frac{1}{3}x_4 \\ x_2 & = & \frac{2}{3} & +\frac{1}{3}x_3 & -\frac{2}{3}x_4 \\ \hline z & = & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3}x_3 & -\frac{2}{3}x_4 \end{array}$$

- La base $\{1, 2\}$ correspond à la solution basique admissible $(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$.

1.5 Terminaison

- Les coefficients des variables hors bases (x_3 et x_4) sont négatifs, donc c'est fini.
- Une solution optimale est $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ avec l'optimum $\frac{7}{3}$.
- Une solution optimale au programme linéaire initial est $(x_1, x_2) = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$.

2 Trois variables et trois inégalités

Programme d'origine :

$$\begin{array}{rrl} \text{Maximiser} & 70x_1 + 50x_2 + 35x_3 & \\ \text{sous les contraintes} & 4x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq 240 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 & \leq 100 \\ & 4x_1 - x_2 & \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

2.1 Réécriture sous forme équationnelle

- D'abord, on réécrit l'inégalité $4x_1 - x_2 \geq 0$ à $-4x_1 + x_2 \leq 0$.
- Ensuite, on introduit les variables d'écart x_4, x_5, x_6, une pour chaque inégalité.

Programme d'origine :

$$\begin{array}{rrl} \text{Maximiser} & 70x_1 + 50x_2 + 35x_3 & \\ \text{sous les contraintes} & 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = 240 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 & = 100 \\ & -4x_1 + x_2 \quad\quad + x_6 & = 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq 0 \end{array}$$

2.2 Solution initiale

- La base $\{4, 5, 6\}$ correspond à la solution basique admissible $(0, 0, 0, 240, 100, 0)$.
- Le tableau associé à cette solution :

$$\begin{array}{ccccccc} x_4 & = & 240 & -4x_1 & -3x_2 & -x_3 \\ x_5 & = & 100 & -2x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_6 & = & 0 & +4x_1 & -x_2 & \\ \hline z & = & 0 & +70x_1 & +50x_2 & +35x_3 \end{array}$$

2.3 Pivot 1

- Le coefficient de x_1 est le plus grand. x_1 entre dans la base.
- L'équation $x_5 = \ldots$ est ***la plus contraignante***, donc x_5 sort de la base.
- On exprime x_1 en termes des variables hors base en utilisant l'équation de x_5 du tableau : $x_5 = 100 - 2x_1 - x_2 - x_3 \iff x_1 = 50 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5$.
- On substitue $x_1 = 50 - \ldots$ dans les autres équations :

$$x_4 = 240 - 4\left(50 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_5\right) - 3x_2 - x_3 = 40 - x_2 + x_3 + 2x_5$$

$$x_6 = 0 + 4\left(50 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_5\right) - x_2 = 200 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_5$$

$$z = 0 + 70\left(50 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_5\right) + 50x_2 + 35x_3 = 3500 + 15x_2 - 35x_5$$

- Le tableau devient :

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & 50 & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{2}x_5 \\ x_4 & = & 40 & -x_2 & +x_3 & +2x_5 \\ x_6 & = & 200 & -3x_2 & -2x_3 & -2x_5 \\ \hline z & = & 3500 & +15x_2 & & -35x_5 \end{array}$$

- La base $\{1, 4, 6\}$ correspond à la solution basique admissible $(50, 0, 0, 40, 0, 200)$.

2.4 Pivot 2

- x_2 entre dans la base.
- L'équation $x_4 = \ldots$ est ***la plus contraignante***, donc x_4 sort de la base.
- On exprime x_2 en termes des variables hors base en utilisant l'équation de x_4 du tableau : $x_4 = 40 - x_2 + x_3 + 2x_5 \iff x_2 = 40 + x_3 - x_4 + 2x_5$.
- On substitue $x_2 = 40 + x_3 - x_4 + 2x_5$ dans les autres équations :

$$x_1 = 50 - \tfrac{1}{2}(40 + x_3 - x_4 + 2x_5) - \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_5 = 30 - x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 - \tfrac{3}{2}x_5$$

$$x_6 = 200 - 3(40 + x_3 - x_4 + 2x_5) - 2x_3 - 2x_5 = 80 - 5x_3 + 3x_4 - 8x_5$$

$$z = 3500 + 15(40 + x_3 - x_4 + 2x_5) - 35x_5 = 4100 + 15x_3 - 15x_4 - 5x_5$$

- Le tableau devient :

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & 30 & -x_3 & +\frac{1}{2}x_4 & -\frac{3}{2}x_5 \\ x_2 & = & 40 & +x_3 & -x_4 & +2x_5 \\ x_6 & = & 80 & -5x_3 & +3x_4 & -8x_5 \\ \hline z & = & 4100 & +15x_3 & -15x_4 & -5x_5 \end{array}$$

- La base $\{1, 2, 6\}$ correspond à la solution basique admissible $(30, 40, 0, 0, 0, 80)$.

2.5 Pivot 3

- x_3 entre dans la base.
- L'équation $x_6 = \ldots$ est ***la plus contraignante***, donc x_6 sort de la base.
- On exprime x_3 en termes des variables hors base en utilisant l'équation de x_6 du tableau : $x_6 = 80 - 5x_3 + 3x_4 - 8x_5 \iff x_3 = 16 + \frac{3}{5}x_4 - \frac{8}{5}x_5 - \frac{1}{5}x_6$.
- On substitue $x_3 = 16 + \frac{3}{5}x_4 - \frac{8}{5}x_5 - \frac{1}{5}x_6$ dans les autres équations :

$$x_1 = 30 - \left(16 + \tfrac{3}{5}x_4 - \tfrac{8}{5}x_5 - \tfrac{1}{5}x_6\right) + \tfrac{1}{2}x_4 - \tfrac{3}{2}x_5 = 14 - \tfrac{1}{10}x_4 + \tfrac{1}{10}x_5 - \tfrac{1}{5}x_6$$

$$x_2 = 40 + \left(16 + \tfrac{3}{5}x_4 - \tfrac{8}{5}x_5 - \tfrac{1}{5}x_6\right) - x_4 + 2x_5 = 56 - \tfrac{2}{5}x_4 + \tfrac{2}{5}x_5 - \tfrac{1}{5}x_6$$

$$z = 4100 + 15\left(16 + \tfrac{3}{5}x_4 - \tfrac{8}{5}x_5 - \tfrac{1}{5}x_6\right) - 15x_4 - 5x_5 = 4340 - 6x_4 - 29x_5 - 3x_6$$

- Le tableau devient :

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & 14 & -\frac{1}{10}x_4 & +\frac{1}{10}x_5 & -\frac{1}{5}x_6 \\ x_2 & = & 56 & -\frac{2}{5}x_4 & +\frac{2}{5}x_5 & -\frac{1}{5}x_6 \\ x_3 & = & 16 & +\frac{3}{5}x_3 & -\frac{8}{5}x_4 & -\frac{1}{5}x_6 \\ \hline z & = & 4340 & -6x_4 & -29x_5 & -3x_6 \end{array}$$

- La base $\{1, 2, 3\}$ correspond à la solution basique admissible $(14, 56, 16, 0, 0, 0)$.

2.6 Terminaison

- Les coefficients des variables hors bases, x_4, x_5, x_6 sont négatifs, donc c'est fini.
- Une solution optimale est $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (14, 56, 16, 0, 0, 0)$ avec l'optimum 4340.
- Une solution optimale au programme linéaire initial est $(x_1, x_2, x_3) = (14, 56, 16)$.