Modélisation SAT et DPLL

► **Exercice 1** ◄ Appliquer la propagation unitaire aux ensembles de clauses suivants. Les ensembles sont-ils satisfaisables ?

(a) $\{(x_1 \vee \neg x_2), (x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4), (x_1 \vee x_3), (\neg x_1), (x_1 \vee x_2 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6)\}$

(b) $\{(x_1 \vee \neg x_2), (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4), (x_1 \vee x_3), (x_1 \vee \neg x_4), (\neg x_1)\}$

(c) $\{(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3), (x_2 \vee \neg x_4), (x_3), (\neg x_5 \vee x_4), (x_5), (\neg x_5 \vee \neg x_6 \vee \neg x_1)\}$

► **Exercice 2** ◄ On reprend la solution de l'exercice "Bataille navale" (td 1).

> On cherche à deviner la position d'un certain nombre de bateaux sur une grille de bataille navale à 2 lignes (1 et 2) et 3 colonnes (1, 2 et 3). On dispose des informations suivantes :
>
> 1. Il y a au moins un bateau sur la ligne 1.
> 2. Il y a au moins un bateau sur la ligne 2.
> 3. Il n'y a pas deux bateaux sur une même colonne.
> 4. Il n'y a pas de bateau en ligne 2, colonne 1.
> 5. S'il y a un ou plusieurs bateaux sur la ligne 1, alors il n'y en a pas en ligne 2, colonne 3.

▷ Traduire le problème en une formule CNF et lui appliquer l'algorithme DPLL avec le choix de variable dans l'ordre $x_{23}, x_{22}, x_{21}, x_{13}, x_{12}, x_{11}$. On essaye d'abord l'affectation à 1, puis à 0.

► **Exercice 3** ◄ Un juge doit former un jury d'au moins 3 personnes. Personne dans le jury ne doit connaître un autre membre. Il y a 6 candidats et ils se connaissent comme indiqué ci-dessous.

candidat	connaissances
1	2 3
2	1 3 4
3	1 2 6
4	2 5
5	4 6
6	3 5

▷ Modéliser ce problème en SAT.

► **Exercice 4** ◄ Le père Noël a N jouets : $J_1, J_2, \ldots, J_N$ qu'il veut donner à M enfants : $E_1, E_2, \ldots, E_M$. De plus, il possède pour chacun des enfants sa liste de vœux. Vous êtes les lutins chargés d'emballer les cadeaux et de choisir les destinataires en vous assurant que tous les enfants seront contents. Un enfant sera content s'il reçoit au moins un cadeau de sa liste. Tous les cadeaux doivent être distribués.

▷ Modéliser ce problème en SAT. Décrire soigneusement les suppositions faites ainsi que les variables et les clauses introduites.

Personnages du film "The Nightmare Before Christmas", Santa Clause est le 3ème à gauche.

► **Exercice 5** ◄ Au cours, on a implanté le "macro" $\mathsf{AtMostOne}(x_1, \ldots, x_n)$ par les clauses $(\neg x_i \vee \neg x_j)$ pour $1 \leq i < j \leq n$, soit $\binom{n}{2}$ clauses. Dans cette exercice, on va l'implanter par $O(n)$ clauses et $O(n)$ variables auxiliaires.

(a) Supposer que $n = 4$. On utilise les variables auxiliaires $y_1, \ldots, y_4$ avec l'interprétation que y_i représente la somme des variables $x_1, \ldots, x_i$. Comme y_4 ne peut être que 0 ou 1, il s'ensuit que $\sum_{i=1}^{4} x_i = y_4 \leq 1$. Introduire les contraintes nécessaires pour imposer cette interprétation.

(b) Généraliser la solution à un n quelconque. De combien de clauses et variables auxiliaires avez vous besoin ?

(c) Pour quelles valeurs de n cette solution utilise-t-elle moins de clauses que $\binom{n}{2}$?

► **Exercice 6** ◄ Jean-Pierre est un drôle de menteur. Il ment six jours de la semaine, mais le septième, il dit toujours la vérité. Sur trois jours consécutifs, il affirme les choses suivantes :

- Jour 1 : "Je mens le lundi et le mardi."
- Jour 2 : "Aujourd'hui, on est jeudi, samedi ou dimanche."
- Jour 3 : "Je mens le mercredi et le vendredi."

▷ Quel jour Jean-Pierre dit-il la vérité ? Modéliser ce problème en SAT.