

# Méthodes et modélisation pour l'optimisation

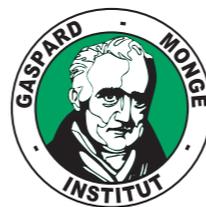
M1 informatique, 2019–2020

02 — Modélisation programmation linéaire

UP

EM

UNIVERSITÉ PARIS-EST  
MARNE-LA-VALLÉE



INSTITUT D'ÉLECTRONIQUE  
ET D'INFORMATIQUE  
GASPARD-MONGÉ

# Un programme linéaire

fonction objectif

variables de décision :  $x, y$

$$\max 150 \cdot x + 100 \cdot y$$

$$10 \cdot x + 10 \cdot y \leq 350$$

$$30 \cdot x + 10 \cdot y \leq 750$$

$$10 \cdot x + 20 \cdot y \leq 600$$

contraintes

$\leq, =, \geq$

contraintes  
de non-négativité

$$x, y \geq 0$$

$(x, y \text{ entiers})$

contraintes d'intégralité

attention : la programmation linéaire  
en nombres entiers est un problème NP-difficile !

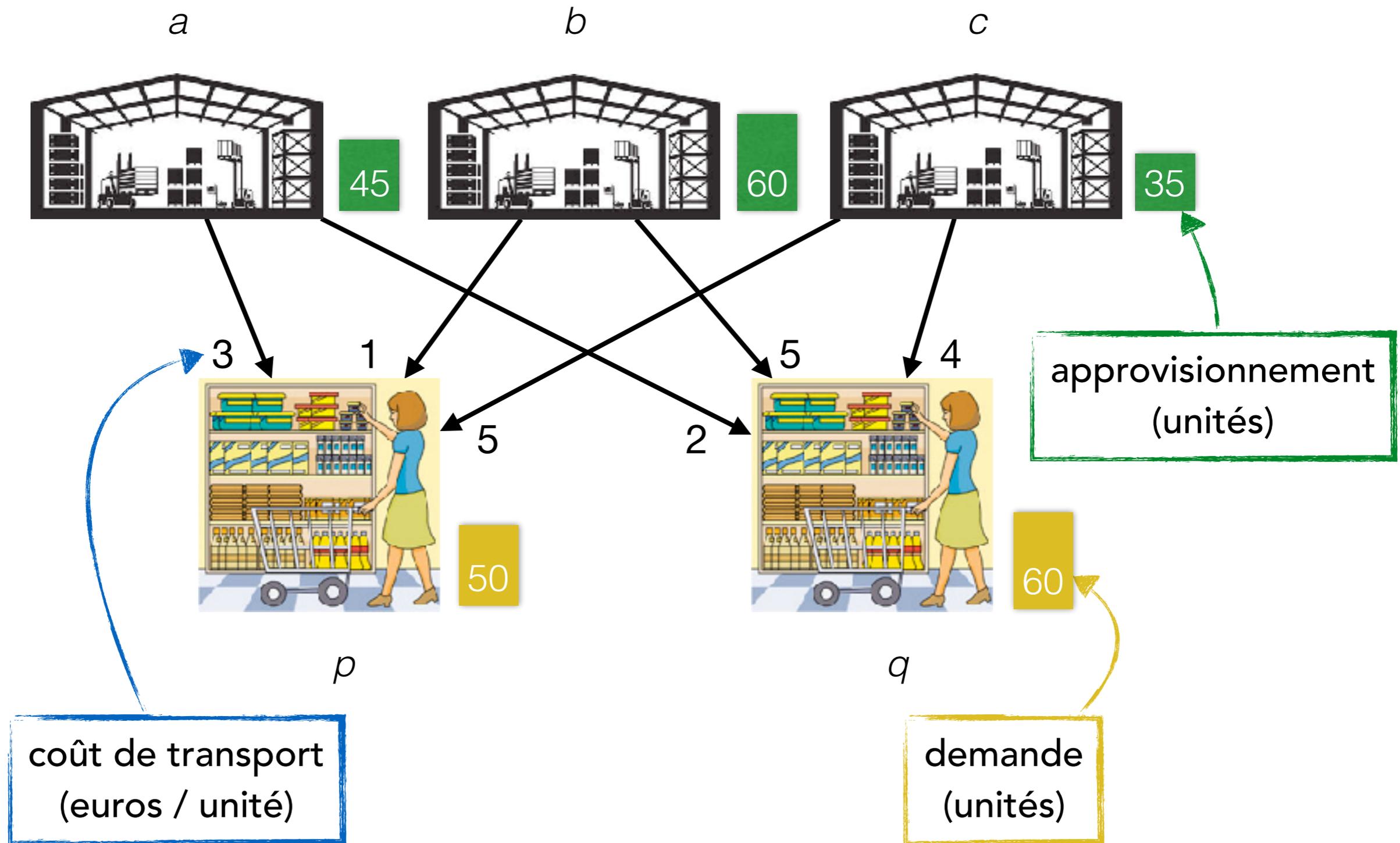
# Régime optimisé

- ▶ *Le conseil supérieur d'hygiène publique français (CSHP) souhaite améliorer le contenu en vitamine A, vitamine C et fibre des repas du CROUS. Le CROUS aimerait rectifier ce problème en proposant une entrée à base de carottes, de choux et de cornichons.*
- ▶ Le tableau ci-dessous représente la quantité de vitamines et de fibres prescrite par portion, leur contenu dans les aliments et le prix au kg des aliments.
- ▶ Aider le CROUS à trouver l'entrée la moins chère satisfaisant les contraintes.

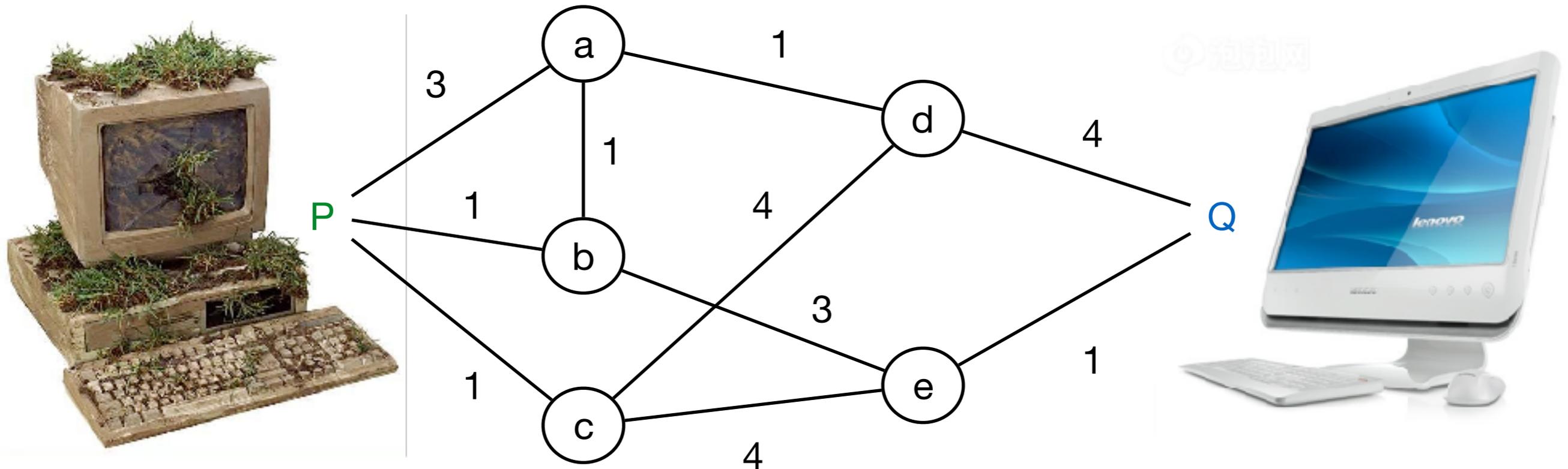
	carotte	choux	cornichon	demande par portion	AJR <sup>1</sup>
Vitamine A (mg/kg)	35	0,5	0,5	0,5 mg	0,8 mg
Vitamine C (mg/kg)	60	300	10	15 mg	80 mg
Fibre (g/kg)	30	20	10	4 g	25 g
coût (€/kg)	0,75	0,50	0,15	-	-

<sup>1</sup>Apports journaliers recommandés selon l'Arrêté du 3 décembre 1993 portant application du décret no 93-1130 du 27 septembre 1993 concernant l'étiquetage relatif aux qualités nutritionnelles des denrées alimentaires, annexe 1 modifiée au 24 février 2010.

# Problème de transport

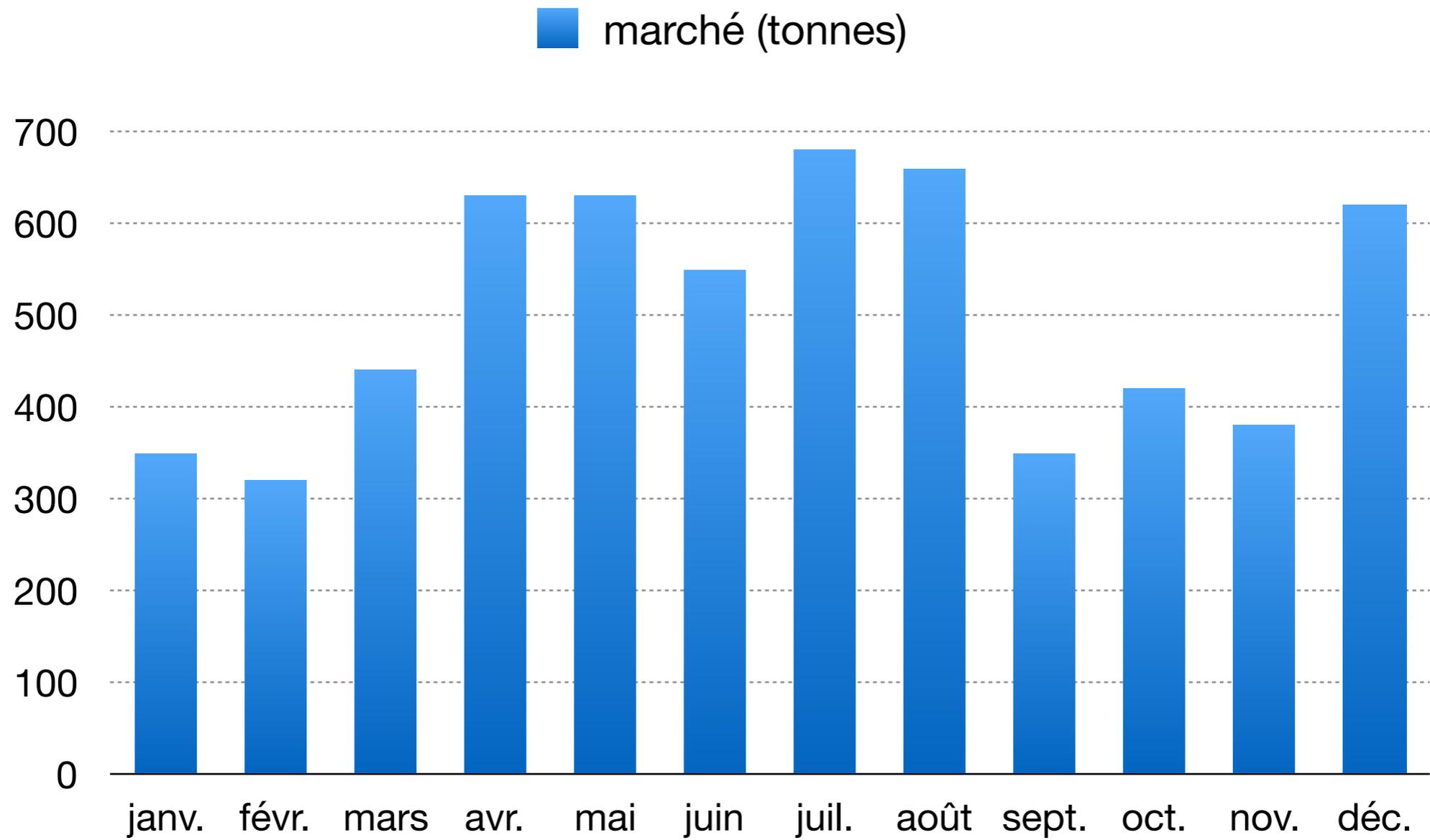


# Flot dans un réseau

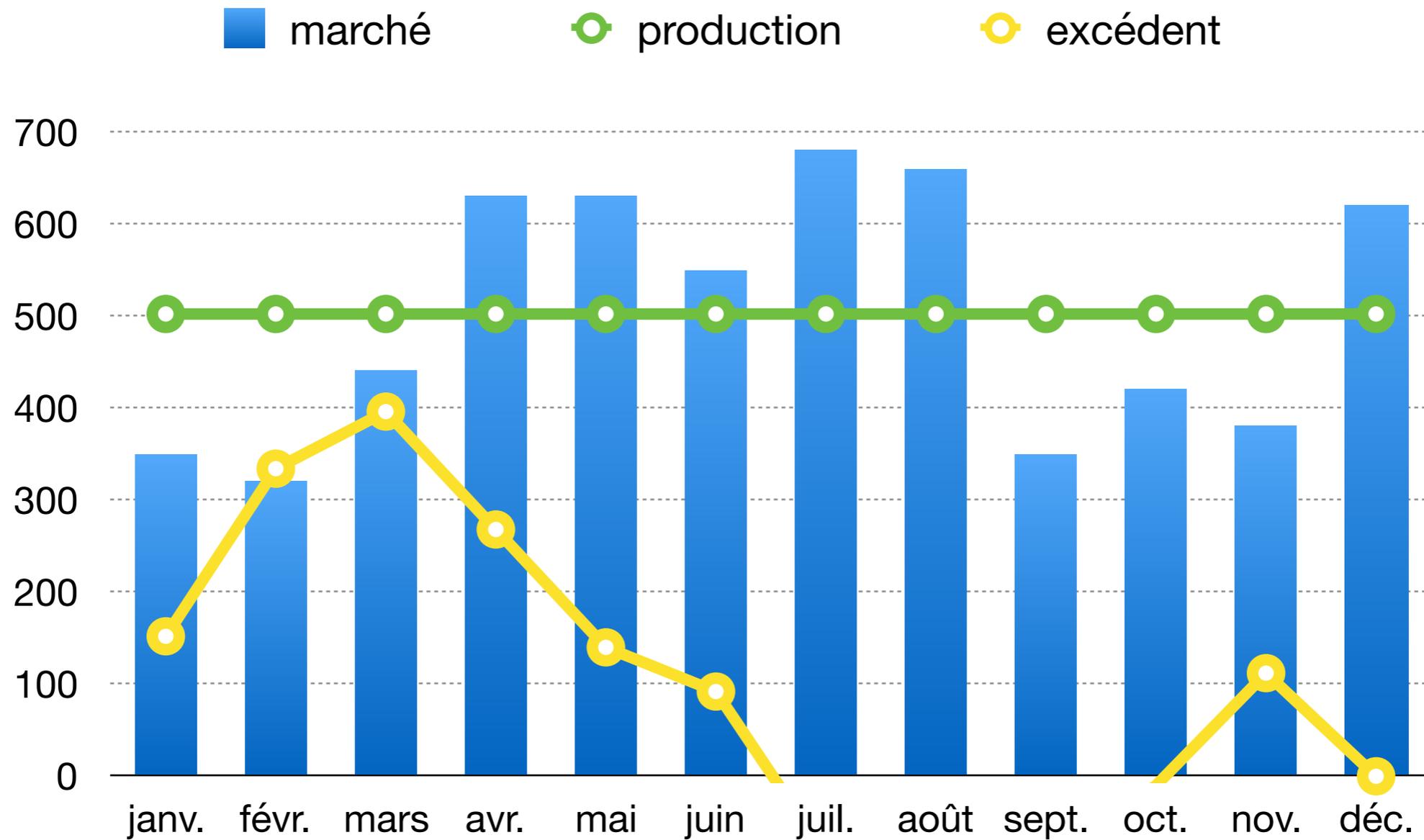


- ▶ On veut transférer les contenus d'un ordinateur **P** vers un autre, **Q**.
- ▶ Les nombres sur les liens indiquent leur débit maximum (Mo/s).
- ▶ Chaque lien est bidirectionnel mais ne peut être utilisé que dans un sens à la fois.
- ▶ Quel est le débit maximum de l'ordinateur **P** vers l'ordinateur **Q** ?

# Le marchand de glace



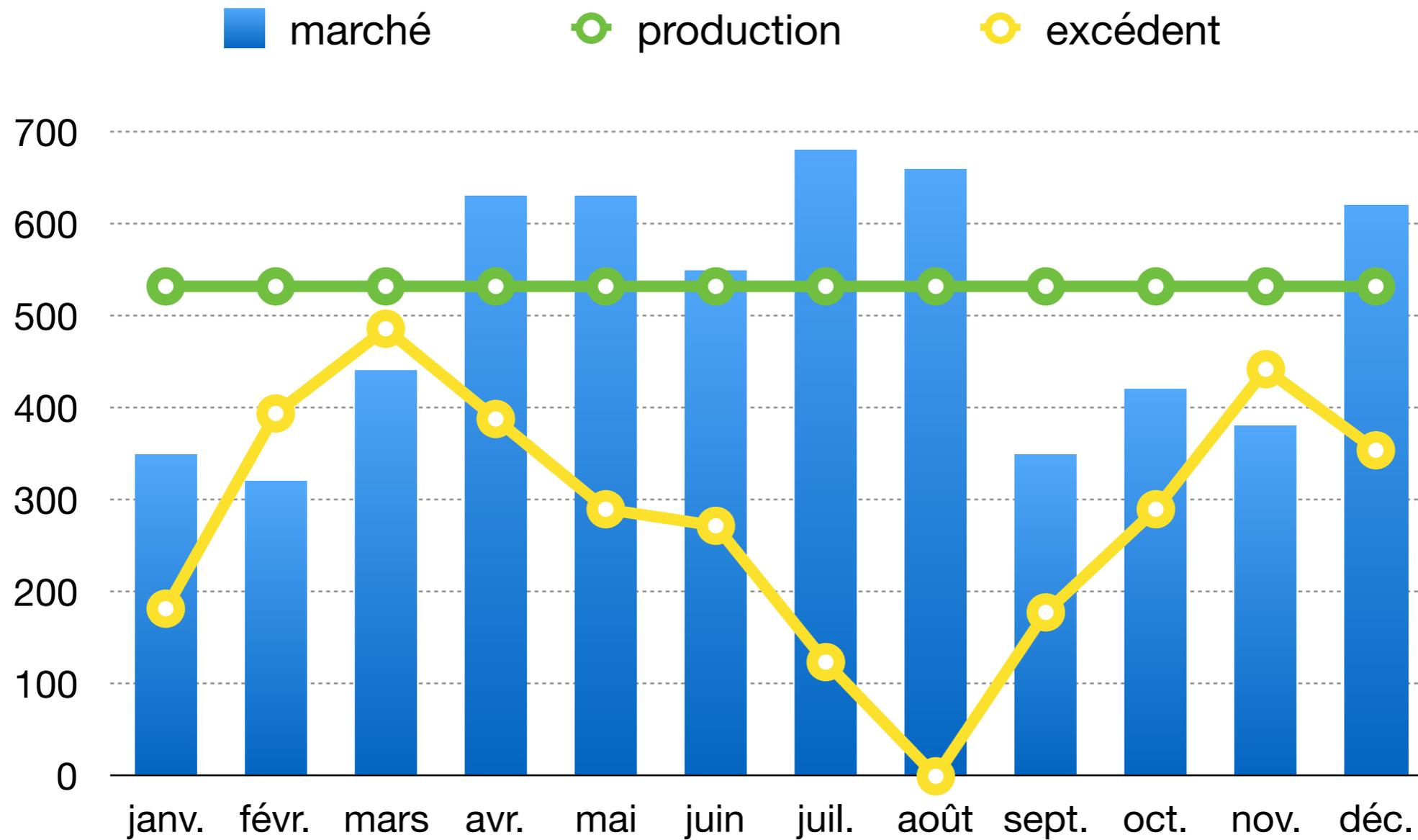
# Le marchand de glace



Déficit de glace en juillet !

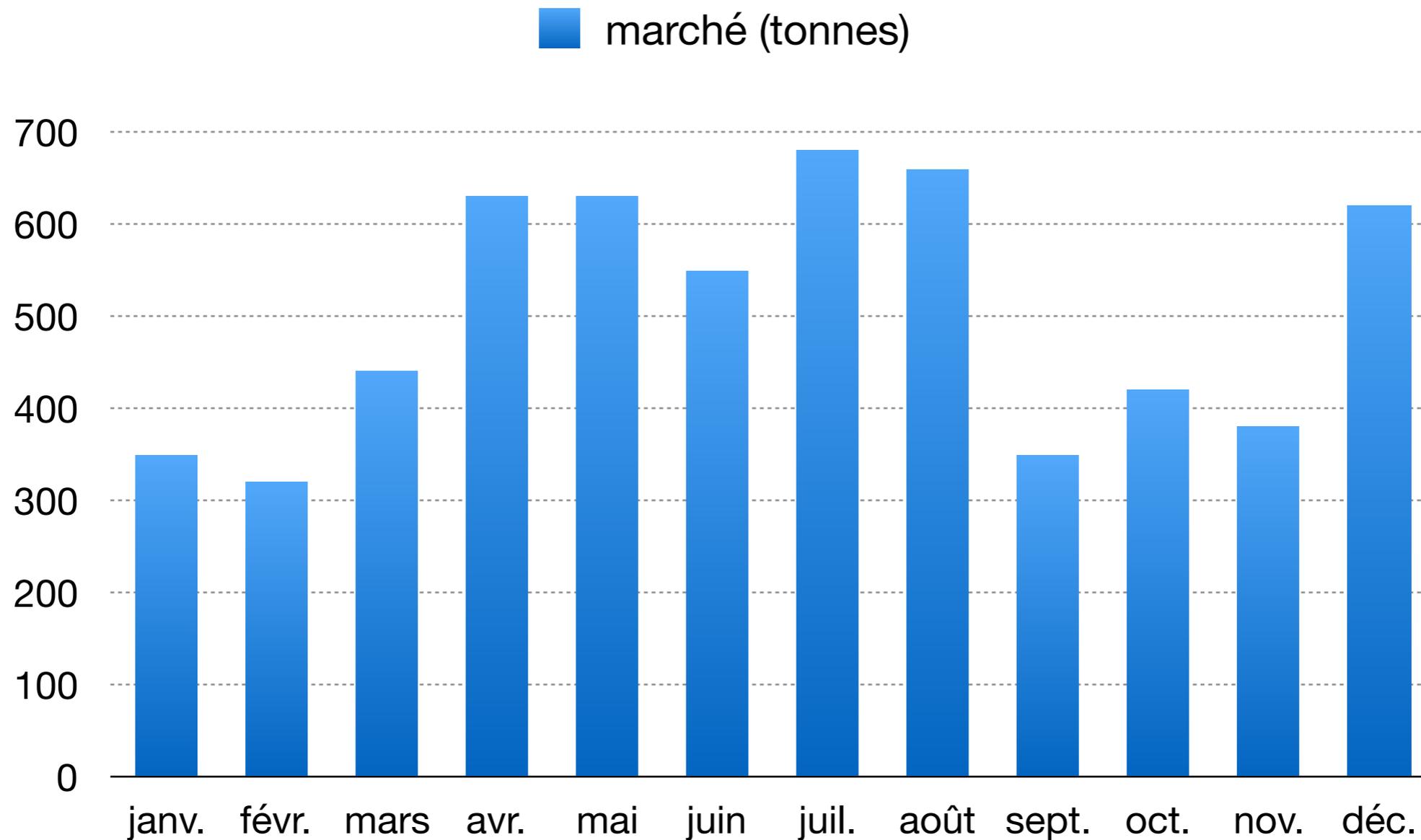


# Le marchand de glace



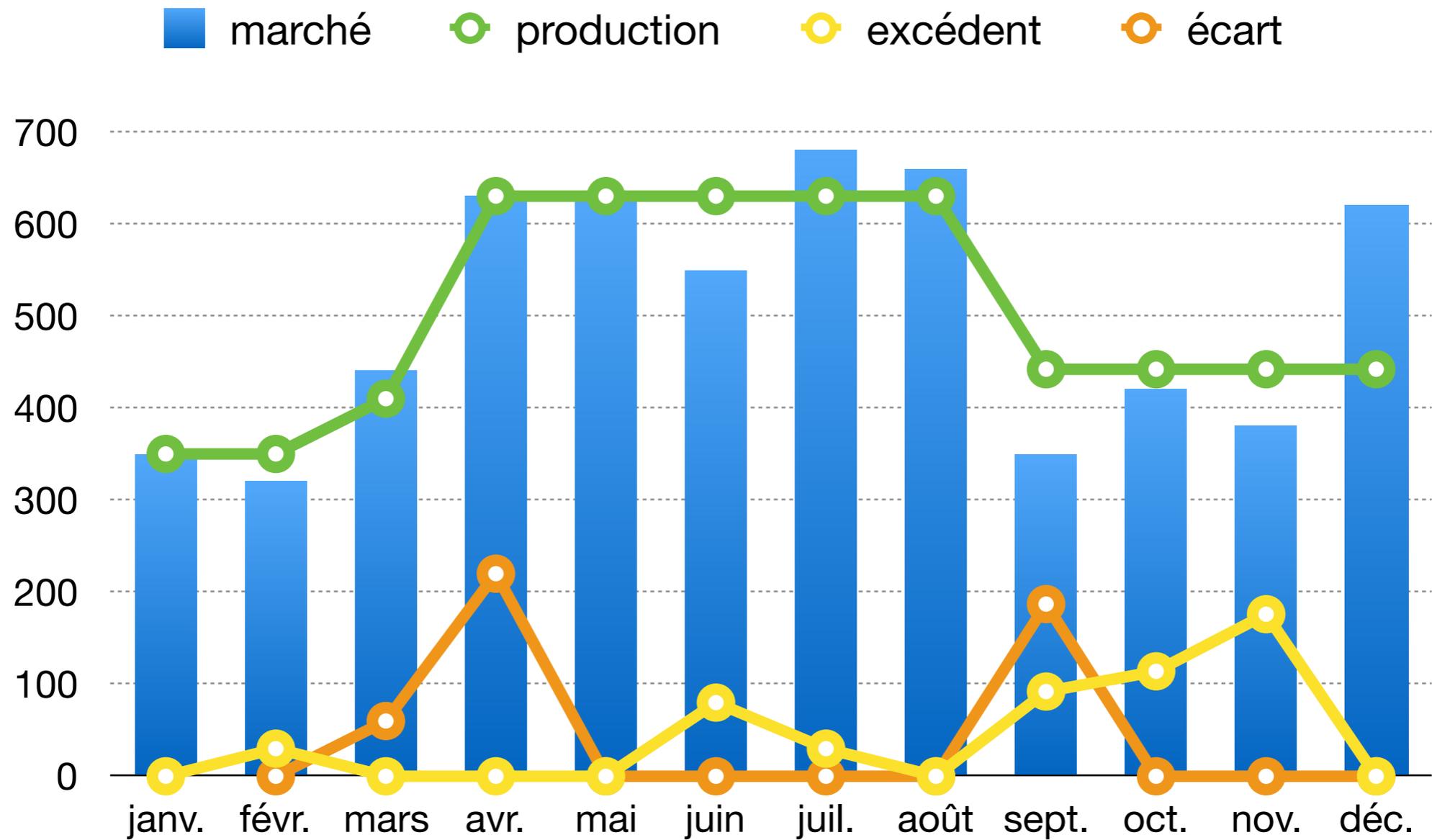
Excédent à la fin de l'année !

# Le marchand de glace



- ▶ Un écart de production d'un mois sur l'autre coûte 50€ / tonne.
- ▶ Le stockage de l'excédent coûte 20€ / tonne et mois.
- ▶ Le marchand cherche à minimiser le coût total.

# Le marchand de glace



Coût total : 33 875 euros



# Un problème générique

- ▶ Il y a  $n$  produits  $P_1, \dots, P_n$  qui peuvent être fabriqués
  - ▶ le produit  $P_j$  se vend  $c_j$  euros,  $j = 1, \dots, n$
- ▶ Il y a  $m$  ressources  $R_1, \dots, R_m$  utilisées pour la fabrication
  - ▶ la disponibilité de la ressource  $R_i$  est  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$
- ▶ La production d'une unité du produit  $P_j$  utilise une quantité  $a_{ij}$  de la ressource  $R_i$
- ▶ Planifier la production pour **maximiser** les bénéfices
- ▶ *Suppositions*
  - ▶ *on peut vendre tout ce qu'on produit*
  - ▶ *on peut produire des fractions de chaque produit*

# Un problème générique

$$\text{Max } c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

ressource  $R_2$   $\longrightarrow$   $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

produit  $P_1$   $\uparrow$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

$n$  produits

$m$  ressources

$x_j$  : unités fabriqués du produit  $P_j$

une unité de  $P_j$  utilise une quantité  $a_{ij}$  de la ressource  $R_i$

