Méthodes et modélisation pour l'optimisation
M1 informatique

Examen – vendredi 10 janvier 2020 14h00-16h00

Une feuille recto-verso manuscrite autorisée. Calculatrice, machine, smartphone, smartwatch interdits. Ce sujet comporte 5 questions. La notation prendra en compte le soin apporté à la rédaction.

Question 1. Un coloriste désire préparer trois peintures de couleurs bleus (bleu canard, bleu électrique et bleu pétrole). Le litre de bleu canard se vend avec un bénéfice de 40 euros, le litre de bleu électrique avec un bénéfice de 35 euros et le litre de bleu pétrole avec un bénéfice de 20 euros. Chaque litre de bleu canard demande (en plus d'un liant et d'un solvant) 20 grammes du pigment X et 30 grammes du pigment Y, chaque litre de bleu électrique demande 25 grammes du pigment X et 25 grammes du pigment Y et chaque litre de bleu pétrole demande 40 grammes du pigment X et 10 grammes du pigment Y. Le coloriste dispose de 0,5 kg du pigment X et 0,3 kg du pigment Y.

a) Le coloriste veut répartir sa production des trois peintures pour maximiser ses bénéfices. (On suppose qu'il peut vendre tout ce qu'il produit.) Formuler ce problème comme un programme linéaire.

b) Le coloriste souhaite que chaque couleur représente au moins 15% de sa production. Comment changer le programme linéaire pour tenir compte de cette nouvelle contrainte ?

Correction :

(a)

Introduire les variables x_c, x_e, x_p : le nombre de littres de bleu canard, bleu électrique et bleu pétrole a préparer.

$$
\begin{array}{rrcl}
\text{Maximiser} & 40x_c + 35x_e + 20x_p & & \\
\text{sous les contraintes} & 20x_c + 25x_e + 40x_p & \leq & 500 \\
 & 30x_c + 25x_e + 10x_p & \leq & 300 \\
 & x_c, x_e, x_p & \geq & 0
\end{array}
$$

(b)

La production totale est de $y = x_c + x_e + x_p$ litres. On peut donc ajouter les contraintes :

$$
\begin{array}{rcl}
y & = & x_c + x_e + x_p \\
x_c & \geq & 0.15y \\
x_e & \geq & 0.15y \\
x_p & \geq & 0.15y
\end{array}
$$

Question 2. On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rrl} \text{Maximiser} & x_1 + 2x_2 & \\ \text{sous les contraintes} & x_1 + x_2 & \leq 18 \\ & x_1 + 3x_2 & \leq 48 \\ & 2x_1 + x_2 & \leq 26 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

a) Donner une forme équationnelle en introduisant des variables d'écart.

b) Appliquer l'algorithme du simplexe, en suivant le critère de Dantzig. Pour chaque itération de l'algorithme, donner la base admissible, le tableau, la solution de base admissible, la valeur de la fonction objectif, la variable qui entre et la variable qui sort de la base.

Correction :

(a)

Introduire trois variables d'écart : x_3, x_4, x_5 pour les trois contraintes.

$$\begin{array}{rl} & \text{Maximiser} \quad x_1 + 2x_2 \\ \text{sous les contraintes} & x_1 + \ x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad = 18 \\ & x_1 + 3x_2 + \qquad + x_4 \qquad\quad = 48 \\ & 2x_1 + \ x_2 + \qquad\qquad\quad + x_5 \ = 26 \\ & \qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

(b) C'est prudent (et fait gagner des points) de vérifier la solution après chaque pivot !

- $x_i \geq 0$ pour tout i ?
- Les équations sont-elles satisfaites par $(x_1, \ldots, x_5)$?
- La valeur de la fonction objectif est-elle correcte ? (comparer z et la valeur obtenue en substituant x_1, x_2 dans l'expression de la fonction objectif.)

Sinon, il y a un problème !

Solution initiale

- La base $\{3, 4, 5\}$ correspond à la solution $(0, 0, 18, 48, 26)$ avec l'objectif 0.

$$\begin{array}{ccccc} x_3 & = & 18 & -x_1 & -x_2 \\ x_4 & = & 48 & -x_1 & -3x_2 \\ x_5 & = & 26 & -2x_1 & -x_2 \\ \hline z & = & 0 & +x_1 & +2x_2 \end{array}$$

Pivot 1

- x_2 a le plus grand coefficient parmi les variables hors base ayant un coefficient positif, donc x_2 entre dans la base. x_4 sort de la base.

$$\begin{array}{ccccc} x_2 & = & 16 & -\frac{1}{3}x_1 & -\frac{1}{3}x_4 \\ x_3 & = & 2 & -\frac{2}{3}x_1 & +\frac{1}{3}x_4 \\ x_5 & = & 10 & -\frac{5}{3}x_1 & +\frac{1}{3}x_4 \\ \hline z & = & 32 & +\frac{1}{3}x_1 & -\frac{2}{3}x_4 \end{array}$$

- La base $\{x_2, x_3, x_5\}$ correspond à la solution admissible $(0, 16, 2, 0, 10)$ avec l'objectif 32.

Pivot 2

- x_1 entre dans la base (seul choix). x_3 sort de la base.

$$\begin{array}{rcrrr} x_1 & = & 3 & -\frac{3}{2}x_3 & +\frac{1}{2}x_4 \\ x_2 & = & 15 & +\frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{2}x_4 \\ x_5 & = & 5 & +\frac{5}{2}x_3 & -\frac{1}{2}x_4 \\ \hline z & = & 33 & -\frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{2}x_4 \end{array}$$

- La base $\{1, 2, 5\}$ correspond à la solution admissible $(3, 15, 0, 0, 5)$ avec l'objectif 33.
- Les coefficients des variables hors base (x_3 et x_3) sont négatifs, donc c'est fini.
- **Une solution optimale au programme initial est :** $(x_1, x_2) = (3, 15)$ avec l'optimum 33.

Question 3. Le professeur d'un cours en informatique veut créer son examen. Il a trouvé 8 exercices (E1, ..., E8) qui lui semblent intéressants. Mais 8 exercices, c'est trop ! Chaque exercice vérifie un certain nombre de notions (N1, ..., N4) qui sont importantes. Pour assurer une couverture du contenu du cours acceptable, il faut vérifier chaque notion au moins trois fois (la contrainte de couverture). Pour ne pas trop gêner les étudiants, il faut choisir au plus 5 exercices (la contrainte de concision).

Le tableau ci-dessous indique, pour chaque exercice, les notions qu'il couvre. Par exemple, l'exercice E3 couvre les notions N1, N3 et N4.

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8
N1	✓		✓	✓			✓	✓
N2	✓	✓			✓			✓
N3		✓	✓			✓	✓	✓
N4			✓	✓	✓	✓		

▷ Proposer une modélisation en SAT du problème de trouver un sous-ensemble d'exercices qui satisfait la contrainte de couverture ainsi que la contrainte de concision.
Vous avez droit d'utiliser les 'macros' AtLeastOne/AtLeast-k *et* AtMostOne/AtMost-k.

Correction : Introduire les variables x_i, $i = 1, 2, \ldots, 8$ où $x_i = 1$ veut dire que le professeur doit sélectionner l'exercice Ei dans son examen.

On ajoute ensuite les deux types de contraintes :

- La contrainte de couverture :
  AtLeast-3$(x_1, x_3, x_4, x_7, x_8)$
  AtLeast-3(x_1, x_2, x_5, x_8)
  AtLeast-3$(x_2, x_3, x_6, x_7, x_8)$
  AtLeast-3(x_3, x_4, x_5, x_6)

- La contrainte de concision :
  AtMost-5$(x_1, x_2, \ldots, x_8)$.

Question 4. Une startup veut louer des serveurs pendant les n mois qui viennent. Chaque serveur peut être loué pour 1, 2 ou 3 mois. Le coût de location d'un serveur pour des durées de 1 à 3 mois est indiqué dans le tableau suivant.

durée (mois)	1	2	3
coût (euro/serveur)	65	120	165

Le paiement de la location se fait entièrement le mois où la location commence. Le budget (en euros) dont la startup dispose pour chaque mois i est donné par un paramètre b_i. Le budget d'un mois i doit être utilisé ce mois et ne peut pas être reporté au mois $i+1$.

Un serveur qui est actuellement loué par la startup est dit *disponible*. La *disponibilité* du mois i est le nombre de serveurs disponibles pendant ce mois. La startup veut maximiser la disponibilité minimale durant les n mois.

▷ Proposer un programme linéaire pour ce problème. On autorise tout fractionnement d'un serveur.

Correction : Soit $x_{i,1}$, $x_{i,2}$ et $x_{i,3}$ le nombre de serveurs loués le mois $i = 1, \ldots, n$ pour une durée de 1, 2 et 3 mois. Alors, les contraintes sur le budget deviennent :

$$65x_{i,1} + 120x_{i,2} + 165x_{i,3} \leq b_i \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, n$$

Soit z_i la disponibilité du mois i. Alors,

$$\begin{aligned} z_1 &= x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} \\ z_2 &= x_{1,2} + x_{1,3} + x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} \\ z_i &= x_{i-2,3} + x_{i-1,2} + x_{i-1,3} + x_{i,1} + x_{i,2} + x_{i,3} \qquad \text{pour i = 3, ..., n} \end{aligned}$$

Finalement, pour maximiser $\min(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, on introduit une variable auxiliaire z et pose le programme :

$$\begin{array}{rl} \text{maximiser} & z \\ \text{sous les contraintes} & z \leq z_i \qquad \text{pour i = 1, ..., n} \\ & + \text{ les autres contraintes ci-dessus} \\ & x_{i,j} \geq 0 \end{array}$$

Question 5.

a) Appliquer l'algorithme de *Propagation Unitaire* à l'ensemble de clauses suivant. Donner l'affectation (partielle) qui en résulte. *(Seule l'affectation est demandée)*

$$\{(x_1 \vee \neg x_2), (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4), (x_1 \vee x_3), (x_1 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5), (\neg x_1), (x_5 \vee x_6 \vee \neg x_7)\}$$

b) Donner le programme auxiliaire au programme linéaire suivant. Ensuite, choisir les variables d'écart comme une base admissible et donner le tableau correspondant.

$$\begin{array}{rrl} \text{Maximiser} & x_3 + x_4 & \\ \text{sous les contraintes} & x_1 - x_2 + x_3 & = 10 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = 20 \\ & x_2 + x_3 + x_4 & = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0 \end{array}$$

Correction :

(a)

La propagation unitaire affecte d'abord $x_1 = 0$, ensuite $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$ et $x_5 = 0$. Après l'exécution, il en reste une clause $(x_6 \vee \neg x_7)$ (pas demandée) et ni x_6 ni x_7 est affectée.

Réponse : l'affectation (partielle) est $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 1, 1, 0)$.

(b)

Le programme auxiliaire (noter la fonction objectif) :

$$\begin{array}{rl} \text{Maximiser} & -x_5 - x_6 - x_7 \\ \text{sous les contraintes} & x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 10 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_6 = 20 \\ & x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 12 \\ & x_1, \ldots, x_7 \geq 0 \end{array}$$

Le tableau correspondant :

$$\begin{array}{ccccccc} x_5 & = & 10 & -x_1 & +x_2 & -x_3 & \\ x_6 & = & 20 & -x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 \\ x_7 & = & 12 & & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ \hline z & = & -42 & +2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 \end{array}$$

Fin du sujet