Travaux Dirigés de Structures Discrètes n°1

Cours d'Informatique

—Licence Informatique—

▸ **Exercice 1.** *Montrer par récurrence les formules suivantes :*

1. $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;
2. $1 + 3 + \cdots + 2n - 1 = n^2$;
3. $2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1)$.

Trouver une interprétation combinatoire de la somme des entiers impairs.

▸ **Exercice 2.** *Retrouver les résultats de l'exercice précédent en sachant que les solutions sont des polynômes de degré 2.*

▸ **Exercice 3.** *Montrer par récurrence les formules suivantes :*

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$;
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

Montrer directement (i.e. sans utiliser la formule ci-dessus) que $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *est un entier.*

▸ **Exercice 4.** *Retrouver les résultats de l'exercice précédent en sachant que les solutions sont des polynômes de degré 3.*

▸ **Exercice 5.** *Déduire de l'exercice précédent, la somme* $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i i^2$. *Retrouver ce résultat par récurrence.*

▸ **Exercice 6.** *Montrer par récurrence les formules suivantes :*

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i)^3 = 2n^2(n+1)^2$;

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3 = n^2(2n^2-1)$.

Retrouver la formule :

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 .$$

▸ **Exercice 7.** *Calculer les sommes suivantes :*

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$;

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (1+x)^k$;

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^k$.

▸ **Exercice 8. (Nombres de Fibonacci)** *On considère la suite de Fibonacci définie par : $F_0 = F_1 = 1$ et la formule de récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.*

1. *Montrer que deux nombres de Fibonacci consécutifs sont premiers entre eux ;*

2. *Soit $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Calculer Φ^2 et en déduire $\Phi^{n-1} \leq F_n \leq \Phi^n$. Calculer une approximation de F_{1000}. Combien de chiffres contient l'écriture en base 10 de F_{1000} ?*

3. *Démontrer la formule :*
$$F_{m+n+2} = F_m F_n + F_{m+1} F_{n+1} .$$

4. *Montrer que si l'on pose $G_n = F_{n-1}$ pour $n > 0$, on a la formule :*
$$G_m \wedge G_n = G_{m \wedge n} .$$