Travaux Dirigés de Structures Discrètes n°2

Cours d'Informatique
—Licence Informatique—

▸ **Exercice 1.** *Donner les complexités en nombre d'opérations des bouts de code suivants :*

1. ```
   for(i=1;i<=n;i++)
     for(j=1;j<=i;j++)
       fonction(i,j);
   ```
2. ```
   for(i=1;i<=n;i++)
     for(j=1;j<=i;j++)
       for(k=1;k<=j;k++)
         fonction(i,j,k);
   ```

▸ **Exercice 2.** *On note $\binom{n}{k}$, le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.*

1. *Montrer que* $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$;
2. *Donner une interprétation combinatoire de cette formule ;*
3. *Montrer que* $\binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}$;
4. *Donner une interprétation combinatoire de cette formule ;*

▸ **Exercice 3.** *Calculer les sommes suivantes :*

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$;
   (a) *par récurrence ;*
   (b) *en développant le polynôme* $(1+x)^n$;
   (c) *en donnant une interprétation combinatoire.*
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$;
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$;
   (a) *par récurrence ;*

(b) en utilisant le polynôme $(1+x)^n$;

(c) en donnant une interprétation combinatoire.

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$;

5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$;

6. $\displaystyle\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}$;

7. $\displaystyle\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{m-k}$.

▸ **Exercice 4.** *Calculer les sommes suivantes :*

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$;

   (a) en étudiant le coefficient de x^n dans le polynôme $(1+x)^{2n}$;

   (b) en donnant une interprétation combinatoire.

▸ **Exercice 5.** *On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n d'une fonction. Par définition, on a $f^{(0)} = f$ et $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$. On rappelle la formule pour la dérivée d'un produit : $(fg)' = f'g + fg'$.*

1. *Donner des expressions de $(fg)^{(n)}$ pour $n = 2, 3, 4, 5$;*

2. *Généraliser et démontrer. Cette formule est due à Leibniz.*

▸ **Exercice 6.** *(**Base de Fibonacci**)*

1. *Montrer que pour tout entier $n > 0$, il existe une suite croissante finie $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ d'indices, telle que*
$$n = F_{i_k} + \cdots + F_{i_2} + F_{i_1}.$$

2. *Montrer qu'il y a unicité de la suite si l'on impose*

   (a) $i_1 \geq 1$;

   (b) $i_k - i_{k-1} \geq 2$.