Travaux Dirigés de Structures Discrètes n°3

Cours d'Informatique

—Licence Informatique—

▸ **Exercice 1.** *On considère l'opérateur Δ défini par : $(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x)$.*

1. *Calculer Δf_k pour $f_k(x) = \binom{x}{k}$;*
2. *Calculer $\Delta^n f$ pour $n = 2, 3, 4$;*
3. *Généraliser et démontrer.*

▸ **Exercice 2.**

1. *Trouver les coefficients a et b tels que :*
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$
2. *En déduire la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i(i+1)}$;*
3. *Trouver les coefficients a et b tels que :*
$$\frac{1}{(x+k)(x+n)} = \frac{a}{x+k} + \frac{b}{x+n}.$$
4. *Trouver les coefficients a, b et c tels que :*
$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$
5. *En déduire la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i(i+1)(i+2)}$;*
6. *Démontrer par récurrence que*
$$\frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{x+k}.$$

▸ **Exercice 3.** *Soit E un ensemble à n éléments. On note $\Lambda = \mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E. Calculer les sommes :*

1. $\displaystyle\sum_{X \in \Lambda} 1$;
2. $\displaystyle\sum_{X \in \Lambda} |X|$;
3. $\displaystyle\sum_{X,Y \in \Lambda} 1$;
4. $\displaystyle\sum_{X,Y \in \Lambda} |X \cap Y|$;
5. $\displaystyle\sum_{X,Y \in \Lambda} |X \cup Y|$.