Travaux Dirigés de Structures Discrètes n°4

Cours d'Informatique

—Licence Informatique—

▸ **Exercice 1.** ***(Changement de base)***

- *Convertir les nombres binaires suivants en base 10 :* $(1010)_2$, $(100101)_2$, $(10000001)_2$.
- *Convertir de la base 10 à la base 2 les entiers : 82, 109, 3433.*

▸ **Exercice 2.** ***(Décomposition en facteurs premiers)***
Décomposer les entiers suivants en facteurs premiers : 56, 323, 720, 2613, 2171.

▸ **Exercice 3.** ***(Calcul du plus grand commun diviseur)***
Calculer le pgcd et les coefficients de Bezout pour les exemples suivants :

1. *26, 19 ;*
2. *72, 40 ;*
3. *186, 68 ;*
4. *187, 34 ;*
5. *841, 160 ;*
6. *2613, 2171 ;*

▸ **Exercice 4.** *On se donne deux entiers positifs a et b. Expliquer pourquoi, si l'on trouve c et d tels que $ac + bd = 1$, on peut conclure que a et b sont premiers entre eux.*

▸ **Exercice 5.** *Soit k un entier relatif. Déterminer $9k + 4 \wedge 2k + 1$ puis $9k + 4 \wedge 2k - 1$.*

▸ **Exercice 6.** ***(Critères de divisibilité)*** *On pose $n\mathbb{Z} = \{nk\}_{k\in\mathbb{Z}}$, ensemble des multiples de n. On rappelle le théorème de division euclidienne (dans $\mathbb{Z}$) : pour $n \geq 1, \forall a \in \mathbb{Z}, \exists (q, r), q \in \mathbb{Z}, r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, a = nq + r$. De plus le couple (q, r) est unique. On note par ailleurs, $r_n(a) := r$.*

1. *montrer que* $a_1 - a_2 \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow r_n(a_1) = r_n(a_2)$ *; on note alors* $a_1 \equiv a_2\ [n]$ *et on dit* a_1 *est congru à* a_2 *modulo* n.
2. *montrer que*
$$\left.\begin{array}{rcl} a_1 & \equiv & a_2\ [n] \\ & \text{et} & \\ b_1 & \equiv & b_2\ [n] \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a_1 b_1 & \equiv & a_2 b_2\ [n] \\ & \text{et} & \\ a_1 + b_1 & \equiv & a_2 + b_2\ [n] \end{array}\right.$$
3. *déduire que* $(\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_0)_{10} \equiv \alpha_n + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_0\ [9]$ *;*
4. *montrer que* $(\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_0)_{10} \equiv \alpha_0 - \alpha_1 + \cdots + (-1)^n \alpha_n\ [11]$ *;*
5. *en déduire les critères de divisiblité par* $3, 9$ *et* 11 *;*
6. *démontrer les critères classiques de divisibilité par* $4, 5$ *et* 25 *;*
7. *imaginer un critère simple de divisibilité par* 275.

▸ **Exercice 7.** *Montrer que tout carré est égal à* $4k$ *ou* $4k + 1$.

▸ **Exercice 8.** *Montrer que tout entier congru à 7 modulo 8 n'est pas somme de trois carrés.*

▸ **Exercice 9.** *Montrer que si* $p > 2$ *est premier et* p *est la somme de 2 carrés, alors* p *est de la forme* $4k + 1$.

▸ **Exercice 10.** *Montrer que tout entier positif de la forme* $3n + 2$ *est divisible par un nombre premier de la même forme.*

▸ **Exercice 11.** *Soit* n *un entier. Montrer que* $n^5 - 5n^3 + 4n$ *est divisible par 120.*

▸ **Exercice 12.** *Plus généralement, soient* a *et* n *deux entiers naturels. Montrer que* $n!$ *divise le produit* $(a + 1)(a + 2) \dots (a + n)$.

▸ **Exercice 13.** *Soient* a *et* b *deux entiers strictement positifs. Trouver tous les entiers strictement positifs* c *tels que chacun des trois nombres* a, b *et* c *divise le produit des deux autres. Traiter le cas* $a = 42$ *et* $b = 30$.