Travaux Dirigés de Structures Discrètes n°5

Cours d'Informatique

—Licence Informatique—

▸ **Exercice 1.** ***(Surjections)***

On appelle S_k^n le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à k éléments.

1. *calculer S_k^n pour $k = 0, 1, 2$ et $k = n-1, n$;*
2. *montrer que*
$$\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} S_l^n = k^n \,;$$
3. *écrire les formules précédentes avec la matrice M*
$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & & & \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$
4. *inverser la matrice M en considérant l'endomorphisme U de polynômes défini par $U(P)(X) = P(X+1)$;*
5. *donner une formule pour S_k^n.*

▸ **Exercice 2.** ***(Partitions)***

On appelle M_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments.

1. *calculer M_1, M_2 et M_3 ;*
2. *montrer que pour $n \geq 0$*
$$M_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} M_{n-k} \,;$$
3. *en déduire la formule*
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n t^n}{n!} = e^{e^t - 1} \,;$$
4. *trouver une relation entre M_n et le nombre S_k^n de surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à k éléments.*

▸ **Exercice 3.** ***(Analyse d'un algorithme de tri)***
Un algorithme de tri est basé sur le principe "diviser pour règner". Ainsi pour trier n objets, on les divise en deux sous ensembles de tailles $\lceil n/2 \rceil$ et $\lfloor n/2 \rfloor$. Chaque sous-ensemble est trié récursivement avec la même méthode. Après cela, on a besoin d'au plus $n-1$ nouvelles comparaisons pour terminer le tri. Le nombre total de comparaisons effectuées est donc au plus $f(n)$ où f est définie par

$$\begin{cases} f(1) = 0\,, \\ f(n) = f\left(\lceil n/2 \rceil\right) + f\left(\lfloor n/2 \rfloor\right) + n - 1\,. \end{cases}$$

1. *calculer $f(n)$ pour $2 \leq n \leq 10$;*
2. *soit g la fonction définie par $g(n) = \sum_{k=1}^{n} \lceil \log_2(k) \rceil$; Calculer $g(n)$ pour $2 \leq n \leq 10$;*
3. *trouver une expression simple pour $g(2^p)$ puis pour $g(n)$;*
4. *montrer que $g(n) = f(n)$.*

▸ **Exercice 4.** ***(Problème des rencontres—Montmort 1708)***
Soit $d(n)$ le nombre de permutations $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ de n entiers telles que $\sigma(i) \neq i$ pour tout i (σ s'appelle un dérangement). On pose par convention $d(0) = 1$.

1. *montrer que* $\quad n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d(n-k)$;
2. *en déduire la série génératrice $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(n)}{n!}\, t^n$;*
3. *calculer $g(t)\, e^t$. En déduire une formule explicite de $g(t)$ et la formule*
$$d(n) = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) \;;$$
4. *calculer $\lim_{n \to \infty} \frac{d(n)}{n!}$.*

▸ **Exercice 5.** ***(Petit théorème de Fermat)***
Soit p un nombre premier.

1. *montrer que pour $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, le coefficient binomial $\binom{p}{k}$ est divisible par p ;*
2. *en déduire que $(a+b)^p \equiv a^p + b^p [p]$ pour tout entier a et b ;*
3. *en déduire le "petit théorème de Fermat" : $a^p \equiv a[p]$ pour tout entier a ;*
4. *quel est le chiffre des unités dans l'écriture $2^{1000000}$ en base 7.*