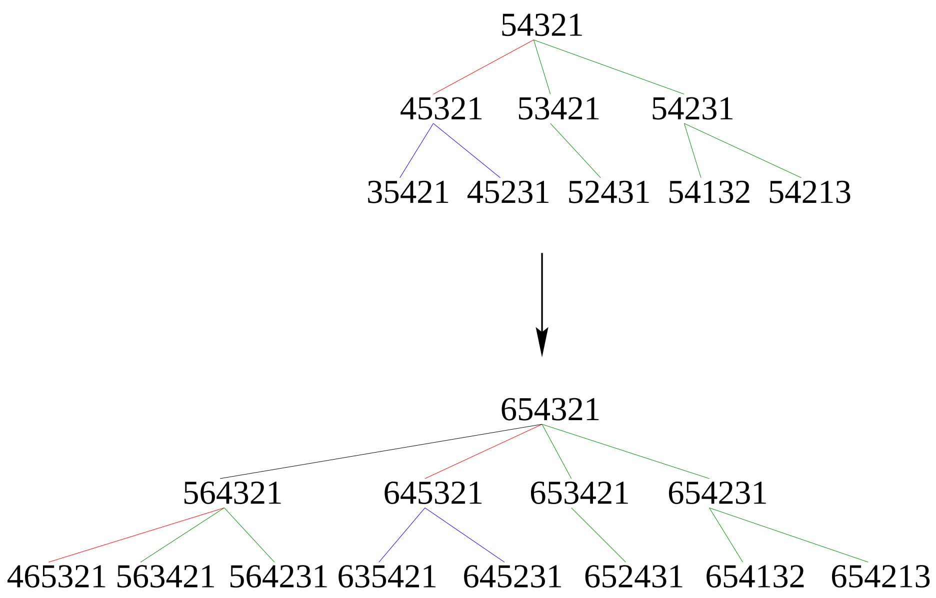
Calcul Symbolique et Calcul Distribué en Combinatoire Algébrique

Sébastien Veigneau
Institut Gaspard Monge
Université de Marne-la-Vallée



Partitions et fonctions symétriques

- Fonction symétrique : invariante par permutation des variables ;
- Base linéaire : fonctions de Schur qui sont des déterminants de fonctions élémentaires ;

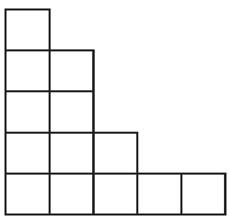
$$\boxed{\text{Fonction de Schur} \longleftrightarrow \text{partition} \longleftrightarrow \text{diagramme}}$$

$$s_{5,3,2,2,1}$$

$$\updownarrow$$

$$(5,3,2,2,1)$$

$$\updownarrow$$

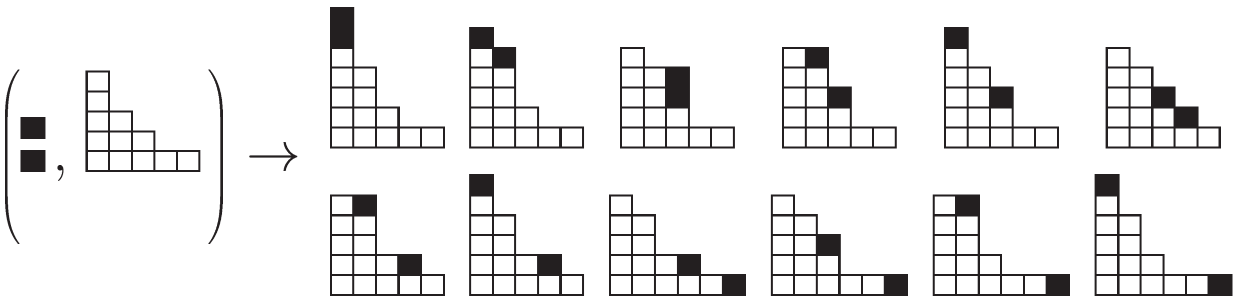


Formule de Pieri

• **Problème** : décrire les λ' apparaissant dans :

$$e_k s_\lambda = \sum_{\lambda'} s_{\lambda'} \quad .$$

• Exemple pour $e_2 s_{5,3,2,2,1}$:



$$\begin{aligned} e_2 s_{5,3,2,2,1} \;=\; & s_{5,3,2,2,1,1,1} + s_{5,3,2,2,2,1} + s_{5,3,3,3,1} \\ & + s_{5,3,3,2,2} + s_{5,3,3,2,1,1} + s_{5,4,3,2,1} \\ & + s_{5,4,2,2,2} + s_{5,4,2,2,1,1} + s_{6,4,2,2,1} \\ & + s_{6,3,3,2,1} + s_{6,3,2,2,2} + s_{6,3,2,2,1,1} \end{aligned}$$

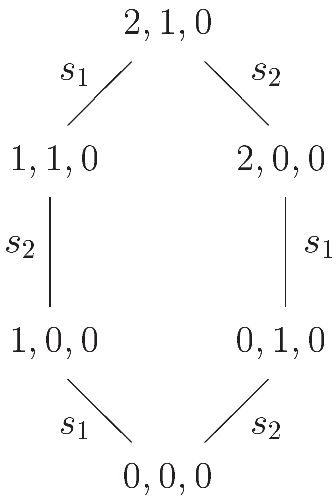
Opération algébrique $\rightsquigarrow$ énumération d'objets

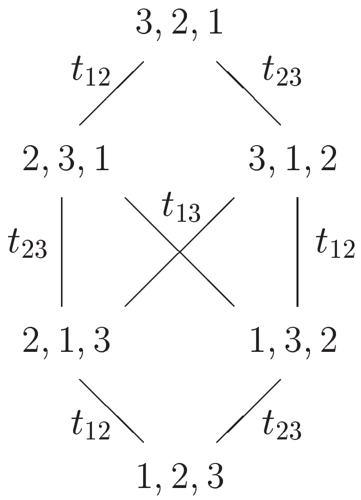
Groupe symétrique

- $\mathfrak{S}_n$: groupe symétrique de degré n ;
- $\mathfrak{S}_n$ engendré par les transpositions élémentaires $s_1, \ldots, s_{n-1}$, qui satisfont :

$$\begin{aligned} s_i s_j &= s_j s_i \quad , \qquad\qquad |i-j|>1 \quad , \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad , \\ s_i^2 &= 1 \quad . \end{aligned}$$

- Deux structures : permutoèdre sur les codes (ordre faible) et Bruhatoèdre (ordre de Bruhat) de $\mathfrak{S}_3$:





Opérateurs de différence divisée

- $\mathbb{Z}[\mathbf{x}] := \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$: anneau des polynômes en $x_1, \ldots, x_n$;
- Opérateurs de différence divisée sur $\mathbb{Z}[\mathbf{x}]$:

$$\partial_i,\ i = 1, \ldots, n-1 \quad .$$

- Action de ∂_i :

$$\mathbb{Z}[\mathbf{x}] \ni \quad p \quad \longrightarrow \quad \partial_i(p) := \frac{p - s_i(p)}{x_i - x_{i+1}} \quad .$$

- Observation :

$$\begin{aligned} \partial_i\partial_j &= \partial_j\partial_i \quad , & |i-j| > 1 \quad , \\ \partial_i\partial_{i+1}\partial_i &= \partial_{i+1}\partial_i\partial_{i+1} \quad , & \\ \partial_i^2 &= 0 \quad . & \end{aligned}$$

$\leadsto$ $\boxed{\text{permutation } w \longleftrightarrow \text{opérateur } \partial_w}$

Polynômes de Schubert doubles[1]

- Polynôme de Schubert maximal, $w_0 \in \mathfrak{S}_n$:

$$\mathbb{X}_{w_0} := \prod_{i+j \leq n} (x_i - y_j) \quad .$$

- Autres polynômes de Schubert, $w \in \mathfrak{S}_n$:

$$\mathbb{X}_w := \partial_{w^{-1}w_0}(\mathbb{X}_{w_0}) \quad .$$

- Permutoèdre des polynômes de Schubert de $\mathfrak{S}_3$:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{X}_{3,2,1} \\
 & (x_1-y_1)(x_1-y_2)(x_2-y_1) \arrow[dl, "\partial_1"'] \arrow[dr, "\partial_2"] & \\
\mathbb{X}_{2,3,1} \quad (x_1-y_1)(x_2-y_1) \arrow[d, "\partial_2"'] & & (x_1-y_1)(x_1-y_2) \quad \mathbb{X}_{3,1,2} \arrow[d, "\partial_1"] \\
\mathbb{X}_{2,1,3} \quad x_1-y_1 \arrow[dr, "\partial_1"'] & & (x_1-y_1)+(x_2-y_2) \quad \mathbb{X}_{1,3,2} \arrow[dl, "\partial_2"] \\
 & 1 & \\
 & \mathbb{X}_{1,2,3} &
\end{tikzcd}$$

Polynômes de Schubert doubles[2]

- Compatibles avec $\mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathfrak{S}_{n+1}$;
- Pour $n \to \infty$, base linéaire des polynômes en $\mathbf{x}$;

- Fonctions de Schur comme cas particulier ;

- Autre cas particulier, les polynômes de Newton :

$$(x_1 - y_1)(x_1 - y_2)(x_1 - y_3)\ldots \quad ,$$

  dans la formule d'interpolation de Newton des fonctions d'une variable ;

$\leadsto$ Interpolation à plusieurs variables.

Formule de Monk double

- **Problème** : retrouver la structure multiplicative de $\mathbb{Z}[\mathbf{x}]$ avec comme base les polynômes de Schubert doubles ;

Proposition 1 *Formule de Monk double :*

$$x_r \mathbb{X}_w = y_{w(r)} \mathbb{X}_w + \sum \mathbb{X}_{wt_{rj}} - \sum \mathbb{X}_{wt_{ir}} \quad ,$$

somme sur toutes les transpositions, $i < r$, $j > r$ telles que $l(wt) = l(w) + 1$.

- **Preuve**: par la formule de Leibnitz pour $\partial_j(x_r \mathbb{X}_\mu)$.

- Exemple de $x_3\, \mathbb{X}_{3,1,\mathbf{5},4,2}$:

$$y_{\mathbf{5}}\, \mathbb{X}_{3,1,\mathbf{5},4,2} - \mathbb{X}_{3,\mathbf{5},\mathbf{1},4,2} - \mathbb{X}_{\mathbf{5},1,\mathbf{3},4,2} + \mathbb{X}_{3,1,\mathbf{6},4,2,\mathbf{5}}$$

- La formule usuelle correspond à $y_1 = y_2 = \cdots = 0$.

Première application

- Soit $\mathcal{I}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ l'idéal engendré par les $e_k(\mathbf{x}) - e_k(\mathbf{y})$ où $e_k(\mathbf{x})$ est la k-ième fonction symétrique élémentaire en les variables $x_1, \ldots, x_n$;
- Anneau des coefficients :

$$\mathbb{K} := \frac{Sym[x_1, \ldots, x_n] \otimes \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_n]}{\mathcal{I}(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \quad .$$

- L'anneau $\mathbb{K}[\mathbf{x}] = \mathbb{Z}[\mathbf{y}][\mathbf{x}]/\mathcal{I}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est un module libre de rang $n!$ sur $\mathbb{K}$, avec comme base, les $\mathbf{X}_w$ ou les $\mathbb{X}_w, w \in \mathfrak{S}_n$;

Proposition 2 *Soient $w \in \mathfrak{S}_n$ et $1 \leq r \leq n$. Dans l'anneau $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$, on a :*

$$x_r \mathbb{X}_w \equiv y_{w(r)} \mathbb{X}_w + \sum \mathbb{X}_{wt_{rj}} - \sum \mathbb{X}_{wt_{ir}} \quad ,$$

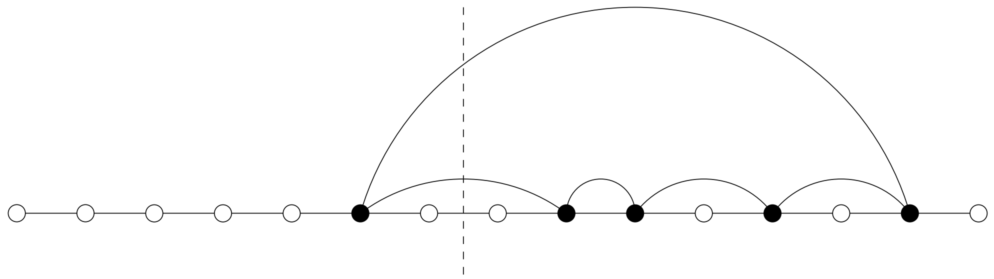
somme sur toutes les transpositions, $i < r$, $j > r$ telles que $l(wt) = l(w) + 1$, la somme étant limitée aux permutations de $\mathfrak{S}_n$.

Formules de Pieri Schubertiennes[(1)]

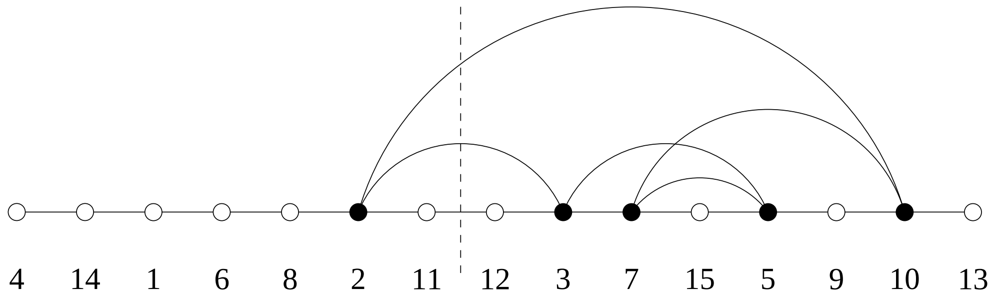
- **Problème** : décrire les ν apparaissant dans :

$$h_m(x_1,\ldots,x_p)\,\mathbf{X}_\mu = \sum_\nu \mathbf{X}_\nu \quad .$$

- Etape élémentaire = soulèvement droit :



- Exemple d'un $(4,7)$-soulèvement droit :



4	14	1	6	8	2	11	12	3	7	15	5	9	10	13
					0			0	1		0		0	
					4			0	1		0		0	
4	14	1	6	8	10	11	12	2	5	15	3	9	7	13

Formules de Pieri Schubertiennes$^{(2)}$

Proposition 3 (**Lascoux, Schützenberger, 1982**)
Soit $\mu \in \mathfrak{S}_n$, *alors :*

$$h_m(x_1, \ldots, x_p)\, \mathbf{X}_\mu = \sum_\nu \mathbf{X}_\nu \quad ,$$

somme sur toutes les ν *obtenues à partir de* μ *par des produits de* (i,p)*-soulèvements droits* ζ_i *tels que* $l(\nu) - l(\mu) = \sum l(\zeta_i)$.

Proposition 4 (Formule de Pieri double)
Soit $\mu \in \mathfrak{S}_n$, *alors :*

$$h_m(x_1, \ldots, x_p)\, \mathbb{X}_\mu = \sum_\nu \mathbf{Y}_{0^{p-1+i}m-i}(\mu \to \nu)\, \mathbb{X}_\nu \quad ,$$

somme sur toutes les permutations ν *telles que la décomposition en cycles de* $\nu\mu^{-1}$ *ne comporte que des* (k,p)*-soulèvements droits avec* $l(\nu) \leq l(\mu) + m$ *et où* $i = l(\nu) - l(\mu)$.

Polynômes de Schubert quantiques

- q-Déformation des fonctions élémentaires ;
- Fonction symétrique : polynôme en les fonctions élémentaires ;

$\rightsquigarrow$ q-Déformation = même polynôme en les q-élémentaires ;

- Polynômes de Schubert quantiques :

$$\mathbf{X}_\mu^q = \sum_{\mathbf{i}} (\mathbf{X}_\mu, \mathbf{x}^{\mathbf{i}'}) P_{\mathbf{i}}^q \quad ,$$

- Exemple :

$$\mathbf{X}_{3,1,5,4,2} = -P_{4,1,0,0,0,0} + P_{3,1,0,1,0} - P_{4,0,0,1,0} \quad ,$$

conduit à :

$$\mathbf{X}^q_{3,1,5,4,2} = -P^q_{4,1,0,0,0,0} + P^q_{3,1,0,1,0} - P^q_{4,0,0,1,0} \quad .$$

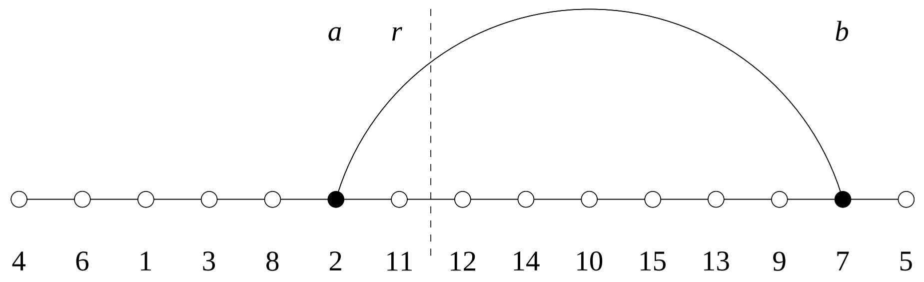
Formule de Monk quantique

Proposition 5 (Formule de Monk)

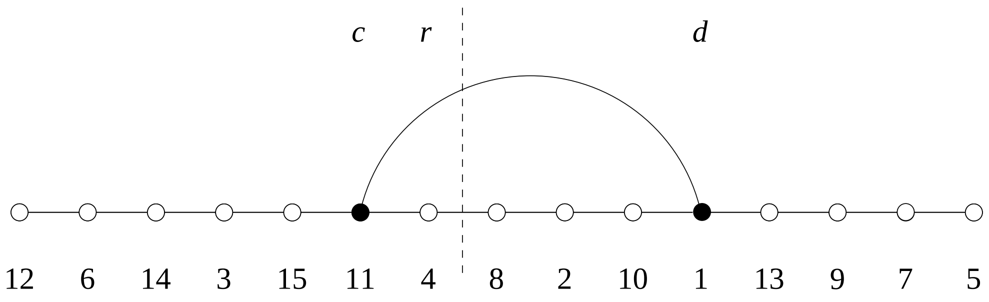
$$(x_1 + \cdots + x_r)\mathbf{X}^q_\mu = \sum \mathbf{X}^q_{\mu t_{ab}} + \sum q_{cd}\mathbf{X}^q_{\mu t_{cd}} \quad ,$$

sur toutes les t_{ab}, $a \leq r < b$, $l(\mu t_{ab}) = l(\mu) + 1$, *sur toutes les* t_{cd}, $c \leq r < d$, $l(\mu t_{cd}) = l(\mu) - 2(d-c) + 1$ *et où* $q_{cd} := q_c q_{c+1} \cdots q_{d-1}$.

- Monk usuel :

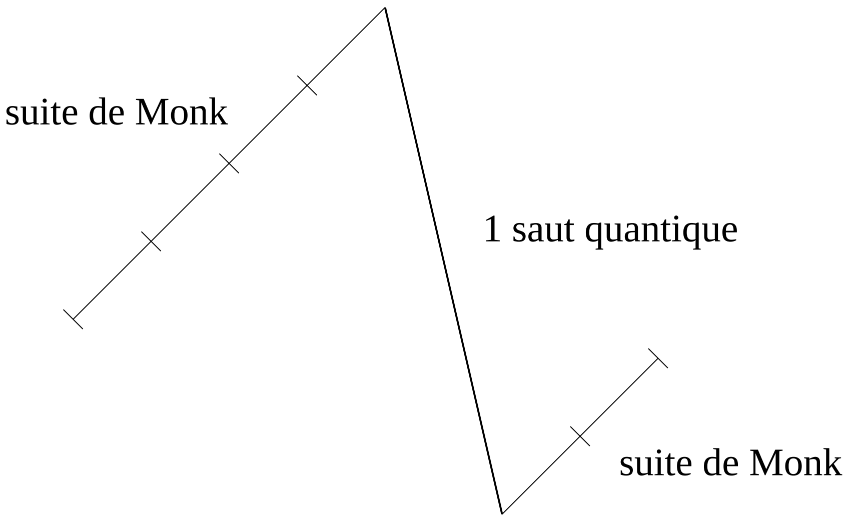


- Saut quantique :



Formule de Pieri quantique

- Opération élémentaire : soulèvement quantique :



Proposition 6 (**Formule de Pieri quantique**)

$$\mathbf{Y}^q_{0^{p-1}m}\mathbf{X}^q_\mu = \sum_\nu q_\zeta \mathbf{X}^q_\nu \quad ,$$

somme sur toutes les permutations ν telles que la décomposition en cycles de $\nu\mu^{-1}$ ne comporte que des (i,p)-soulèvements quantiques droits ζ_i avec $l(\nu) + deg(q_\zeta) = l(\mu) + m$.

Motivations

- Trouver des bases linéaires de $\mathbb{Z}[\mathbf{x}]$ mieux adaptées à certains problèmes que la base des monômes ;
- Cas d'une variable : interpolation de Lagrange, interpolation de Newton ;
- Cas de plusieurs variables : les outils sont moins nombreux ;

- Cas des polynômes symétriques : recours à des objets combinatoires tels que les partitions ou les tableaux de Young ;
- Méthodes inutilisables dans le cas de polynômes génériques, même s'ils ont des symétries partielles.

L'idée...

- Polynômes de Schubert : base linéaire de $\mathbb{Z}[\mathbf{x}]$;
  - compatible avec l'action du groupe symétrique ;
  - compatible avec l'action des différences divisées ;
  - fonctions de Schur sont des polynômes de Schubert particuliers ;
  - structure multiplicative facile à décrire.
- Calculs avec les fonctions symétriques, indépendants du nombre de variables ;
- $\mathbb{Z}[\mathbf{x}]$ est un module libre de rang fini $(n!)$ sur $Sym[x_1, \ldots, x_n]$;

Base du module : polynômes de Schubert $\mathbf{X}_\mu$, $\mu \in \mathfrak{S}_n$

Problème : structure multiplicative.

Module libre sur $Sym[\mathbf{x}]$

Pour être capable d'utiliser les méthodes liées aux fonctions symétriques dans le cas de polynômes génériques, nous regardons :

$$\boxed{\mathbb{Z}\,[\mathbf{x}] \text{ comme module sur } Sym[\mathbf{x}]}$$

- $\mathbb{Z}\,[\mathbf{x}] = \bigoplus_{\alpha \subseteq \rho} Sym[\mathbf{x}]\; x^{\alpha}$, où $\rho = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$;
- $\mathbb{Z}\,[\mathbf{x}] = \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_n} Sym[\mathbf{x}]\; \mathbf{X}_w$;
- Tout polynôme p de $\mathbb{Z}\,[\mathbf{x}]$ peut s'exprimer de manière unique comme une somme :

  $$p = \sum_{\mu \in \mathfrak{S}_n} c_\mu \, \mathbf{X}_\mu \quad ,$$

  où les c_μ sont des fonctions symétriques ;
- On choisit comme base de $Sym[\mathbf{x}]$, la base des fonctions de Schur.

Exemple dans $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_6]$

- Soit p le polynôme suivant :

$$p = s_{1^6}\mathbf{X}_{1,3,4,5,6,2} + s_{2^3}\mathbf{X}_{2,3,4,5,6,1} \quad .$$

- Si l'on sait décrire la structure multiplicative, on peut calculer p^2 :

$$\begin{aligned} p^2 = {} & (2s_{4^3,2,1^2} + 2s_{4^2,3,2^2,1} + 2s_{4,3^2,2^3} + s_{3^3,2^3} + \\ & 2s_{3^5,2} + 2s_{4,3^3,2^2} + 2s_{4^2,3,2^3} + 2s_{4,3^4,1} + s_{5,3^4} + \\ & 2s_{5,3^3,2,1} + 2s_{4^2,3^2,2,1} + s_{5,4,3^2,2} + 2s_{5,4,3,2^2,1} + \\ & 2s_{4^3,2^2,1} + s_{5,4^2,2^2} + 2s_{5,4,3^2,1^2} + s_{5^2,3^2,1} + \\ & 2s_{5^2,3,2,1^2} + 2s_{5,4^2,2,1^2} + s_{5^2,4,2,1} + s_{5^3,1^2} + \\ & 2s_{5^2,4,1^3})\mathbf{X}_{2,3,4,5,6,1} + (s_{3^4,2^2} - s_{5^3,1^3} - \\ & s_{5^2,4,2,1^2} - s_{5^2,3^2,1^2} - s_{5,4^2,2^2,1} - s_{5,4,3^2,2,1} - \\ & s_{5,3^4,1} - s_{4^3,2^3} - s_{4^2,3^2,2^2} - s_{4,3^4,2} - s_{3^6}) \\ & \mathbf{X}_{1,3,4,5,6,2} + (-2s_{4^3,2^3} - s_{3^5,2})\mathbf{X}_{1,2,4,5,6,3} \\ & -s_{3^6}\mathbf{X}_{1,2,3,5,6,4} \end{aligned}$$

- p compte 146 monômes contre 2117 pour p^2.

Exemple dans $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_6]$

$$p = x_6x_5^2x_4^2x_3^2x_2^2x_1 + x_6x_5^2x_4^2x_3^2x_2x_1^2 + x_6x_5^2x_4^2x_3x_2^2x_1^2 + x_6x_5^2x_4x_3^2x_2^2x_1^2 + x_6x_5x_4^2x_3^2x_2^2x_1^2 + x_5^3x_4^3x_3x_2^3x_1 + x_5^3x_4^3x_3x_2x_1^3 + x_5^3x_4x_3^3x_2^3x_1 +$$

$$x_5^3x_4^2x_3^2x_2^3x_1 + x_5^3x_4x_3^3x_2^2x_1^2 + x_5^3x_4^3x_3^2x_2^2x_1 + x_5^3x_4^3x_3^2x_2x_1^2 + x_5^3x_4^3x_3x_2^2x_1^2 + x_5^3x_4^2x_3^3x_2^2x_1 + x_5^3x_4^2x_3^3x_2x_1^2 + x_5^3x_4^2x_3^2x_2x_1^3 + x_5^3x_4^2x_3x_2^3x_1^2 +$$

$$x_5^3x_4x_3^2x_2^3x_1^2 + x_5^3x_4x_3^2x_2^2x_1^3 + x_5^2x_4x_3^2x_2^3x_1^3 + x_5^2x_4^3x_3^3x_2^2x_1 + x_5^2x_4^3x_3^3x_2x_1^2 + x_5^2x_4^3x_3^2x_2^3x_1 + x_5^2x_4^3x_3^2x_2x_1^3 + x_5^2x_4^3x_3x_2^3x_1^2 + x_5^2x_4^3x_3x_2^2x_1^3 +$$

$$x_5^2x_4^2x_3^3x_2^3x_1 + x_5^2x_4^2x_3^3x_2x_1^3 + x_5^2x_4^2x_3x_2^3x_1^3 + x_5^2x_4x_3^3x_2^3x_1^2 + x_5^2x_4x_3^3x_2^2x_1^3 + 2x_5^2x_4^3x_3^2x_2^2x_1^2 + 2x_5^2x_4^2x_3^3x_2^2x_1^2 + 2x_5^2x_4^2x_3^2x_2^3x_1^2 + 2x_5^2x_4^2x_3^2x_2^2x_1^3 +$$

$$x_5x_4^3x_3^3x_2^2x_1^2 + x_5x_4^3x_3^2x_2^3x_1^2 + +x_5^3x_4x_3x_2x_1^3x_6^2 + x_5x_4x_3x_2^3x_1^3x_6^2 + x_5^3x_4^2x_3x_2^2x_1^3 + x_5^3x_4^2x_3x_2^2x_1x_6^2 + x_5^3x_4^2x_3x_2x_1^2x_6^2 + x_5^3x_4x_3^2x_2x_1^2x_6^2 +$$

$$x_5^3x_4x_3x_2^2x_1^2x_6^2 + x_5^2x_4x_3x_2^3x_1^2x_6^2 + x_5^2x_4^3x_3x_2x_1^2x_6^2 + x_5^2x_4^2x_3^3x_2x_1x_6^2 + x_5^2x_4^2x_3x_2^3x_1x_6^2 + x_5^2x_4^2x_3x_2x_1^3x_6^2 + x_5^2x_4x_3^3x_2^2x_1x_6^2 + x_5^2x_4x_3^3x_2x_1^2x_6^2 +$$

$$x_5^2x_4x_3^2x_2^3x_1x_6^2 + x_5x_4^3x_3^2x_2^2x_1x_6^2 + x_5x_4^3x_3^2x_2x_1^2x_6^2 + x_5x_4^3x_3x_2^2x_1^2x_6^2 + x_5x_4^2x_3^3x_2^2x_1x_6^2 + x_5x_4^2x_3^3x_2x_1^2x_6^2 + x_5x_4^2x_3^2x_2x_1^3x_6^2 + x_5x_4^2x_3x_2^3x_1^2x_6^2 +$$

$$x_5x_4x_3^2x_2^3x_1^2x_6^2 + x_5x_4x_3^2x_2^2x_1^3x_6^2 + x_5^2x_4^3x_3x_2x_1^3x_6 + x_5^2x_4x_3^3x_2^3x_1x_6 + x_5^2x_4^3x_3x_2^3x_1x_6 + x_5^2x_4^3x_3^3x_2x_1x_6 + x_5x_4x_3^2x_2^3x_1^3x_6 +$$

$$x_5^3x_4x_3^2x_2x_1^3x_6 + x_5^3x_4^3x_3^2x_2x_1x_6 + x_5^3x_4^3x_3x_2^2x_1x_6 + x_5^3x_4x_3x_2^2x_1^3x_6 + x_5^3x_4x_3x_2^3x_1^2x_6 + x_5^3x_4^3x_3x_2x_1^2x_6 + x_5^3x_4^2x_3^3x_2x_1x_6 +$$

$$x_5^3x_4^2x_3x_2^3x_1x_6 + x_5^3x_4^2x_3x_2x_1^3x_6 + x_5^3x_4x_3^3x_2^2x_1x_6 + x_5^3x_4x_3^3x_2x_1^2x_6 + x_5^3x_4x_3^2x_2^3x_1x_6 + x_5^2x_4x_3^3x_2x_1^3x_6 + x_5^2x_4x_3x_2^3x_1^3x_6 +$$

$$x_5x_4^3x_3^3x_2^2x_1x_6 + x_5x_4^3x_3^3x_2x_1^2x_6 + x_5x_4^3x_3^2x_2^3x_1x_6 + x_5x_4^3x_3^2x_2x_1^3x_6 + x_5x_4^3x_3x_2^3x_1^2x_6 + x_5x_4^3x_3x_2^2x_1^3x_6 + x_5x_4^2x_3^3x_2^3x_1x_6 +$$

$$x_5x_4^2x_3^3x_2x_1^3x_6 + x_5x_4^2x_3x_2^3x_1^3x_6 + x_5x_4x_3^3x_2^3x_1^2x_6 + x_5x_4x_3^3x_2^2x_1^3x_6 + x_5^3x_4x_3^2x_2^2x_1x_6^2 + x_5^3x_4x_3^3x_2x_1x_6^2 + x_5^3x_4x_3x_2^3x_1x_6^2 +$$

$$x_5x_4^2x_3x_2^2x_1^3x_6^2 + x_5x_4^3x_3^3x_2x_1x_6^2 + x_5x_4^3x_3x_2^3x_1x_6^2 + x_5x_4^3x_3x_2x_1^3x_6^2 + x_5x_4x_3^3x_2x_1^3x_6^2 + x_5^3x_4^3x_3^3x_2x_1 + x_5^3x_4x_3^3x_2x_1^3 + x_5^3x_4x_3x_2^3x_1^3 +$$

$$x_5x_4^3x_3^3x_2^3x_1 + x_5x_4^3x_3^3x_2x_1^3 + x_5x_4^3x_3x_2^3x_1^3 + x_5^2x_4x_3^2x_2x_1^3x_6^2 + 2x_5^2x_4^2x_3x_2^2x_1^2x_6^2 + 2x_5^2x_4x_3^2x_2^2x_1^2x_6^2 + x_5x_4x_3^3x_2^2x_1^2x_6^2 + x_5^3x_4^2x_3^2x_2x_1x_6^2 +$$

$$x_5x_4^3x_3^2x_2^2x_1^3 + x_5x_4^2x_3^3x_2^3x_1^2 + x_5x_4^2x_3^3x_2^2x_1^3 + x_5x_4x_3^3x_2^3x_1^3 + 5x_5^2x_4^2x_3^2x_2^2x_1^2x_6 + x_5x_4^2x_3^2x_2^3x_1^3 + x_5x_4x_3^3x_2^3x_1x_6^2 + x_5^3x_4^3x_3x_2x_1x_6^2 +$$

$$2x_5^2x_4^3x_3^2x_2^2x_1x_6 + 2x_5^2x_4^3x_3^2x_2x_1^2x_6 + 2x_5^2x_4^3x_3x_2^2x_1^2x_6 + 2x_5^2x_4^2x_3^3x_2^2x_1x_6 + 2x_5^2x_4^2x_3^3x_2x_1^2x_6 + 2x_5^2x_4^2x_3^2x_2x_1^3x_6 + 2x_5^2x_4^2x_3x_2^3x_1^2x_6 +$$

$$2x_5^2x_4x_3^2x_2^3x_1^2x_6 + 2x_5^2x_4x_3^2x_2^2x_1^3x_6 + 2x_5x_4^3x_3^2x_2^2x_1^2x_6 + 2x_5x_4^2x_3^3x_2^2x_1^2x_6 + 2x_5x_4^2x_3^2x_2^3x_1^2x_6 + 2x_5x_4^2x_3^2x_2^2x_1^3x_6 + 2x_5^3x_4^2x_3^2x_2^2x_1^2 +$$

$$2x_5^3x_4^2x_3^2x_2^2x_1x_6 + 2x_5^3x_4^2x_3^2x_2x_1^2x_6 + 2x_5^3x_4^2x_3x_2^2x_1^2x_6 + 2x_5^3x_4x_3^2x_2^2x_1^2x_6 + 2x_5^2x_4^2x_3x_2^2x_1^3x_6 + 2x_5^2x_4^2x_3^2x_2^3x_1x_6 + 2x_5^2x_4x_3^3x_2^2x_1^2x_6 +$$

$$x_5^2x_4^3x_3^2x_2x_1x_6^2 + x_5^2x_4^3x_3x_2^2x_1x_6^2 + x_5^2x_4x_3x_2^2x_1^3x_6^2 + x_5x_4^2x_3^2x_2^3x_1x_6^2 + 2x_5x_4^2x_3^2x_2^2x_1^2x_6^2 + 2x_5^2x_4^2x_3^2x_2^2x_1x_6^2 + 2x_5^2x_4^2x_3^2x_2x_1^2x_6^2$$

Structure multiplicative[1]

- On a besoin de savoir :
  - comment multiplier les coefficients ;
  - comment multiplier les polynômes de Schubert.
- Le produit $\mathbf{X}_\mu \mathbf{X}_\nu,\ \ \mu, \nu \in \mathfrak{S}_n$ est somme de $\mathbf{X}_\zeta$;
- En général, $\zeta \notin \mathfrak{S}_n$ mais $\zeta \in \mathfrak{S}_{2n}$;

⇝ On a donc besoin d'un algorithme :

$$\mathbf{X}_\zeta(x_1, \ldots, x_n)$$
$$\downarrow$$
expression dans la base $\mathbf{X}_\eta$, $\eta \in \mathfrak{S}_n$,
avec des fonctions symétriques
comme coefficients

Structure multiplicative[2]

- Multiplication usuelle par la formule de Monk :

$$x_k \, \mathbf{X}_\mu = \sum \pm \mathbf{X}_\eta \quad .$$

- En général, si $\mu \in \mathfrak{S}_n$ alors il existe $\mathbf{X}_\zeta$, $\zeta \in \mathfrak{S}_{n+1}$;

- **Fait** : $\mathbf{X}_\zeta = \sum_{\mu \in \mathfrak{S}_n} \pm e_i \, \mathbf{X}_\mu$.

- **Exemples** : dans $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_5]$:
  - $x_2 \, \mathbf{X}_{1,2,4,5,3} = -\mathbf{X}_{2,1,4,5,3} + \mathbf{X}_{1,4,2,5,3} + \mathbf{X}_{1,3,4,5,2}$
    (pas de terme supplémentaire)
  - $x_2 \, \mathbf{X}_{3,5,2,4,1} = -\mathbf{X}_{5,3,2,4,1} + \mathbf{X}_{3,6,2,4,1,5}$
    (terme supplémentaire dans $\mathfrak{S}_6$)

$$\boxed{\begin{gathered}-\mathbf{X}_{5,3,2,4,1} + e_5 \left(\mathbf{X}_{2,3,1,5,4} - \mathbf{X}_{1,3,4,5,2} - \mathbf{X}_{2,4,1,3,5}\right) + \\ e_4 \, \mathbf{X}_{2,3,4,5,1} - e_2 \, \mathbf{X}_{3,4,2,5,1} + e_1 \, \mathbf{X}_{3,5,2,4,1}\end{gathered}}$$

Structure multiplicative[3]

- Suffisant de considérer les permutations dominantes caractérisées par $\mathbf{n}$ et $\mathbf{m}$:

$$(\mathbf{n}+1, \mathbf{n}, \ldots, \widehat{\mathbf{m}}, \ldots, 2, 1, \mathbf{m})$$

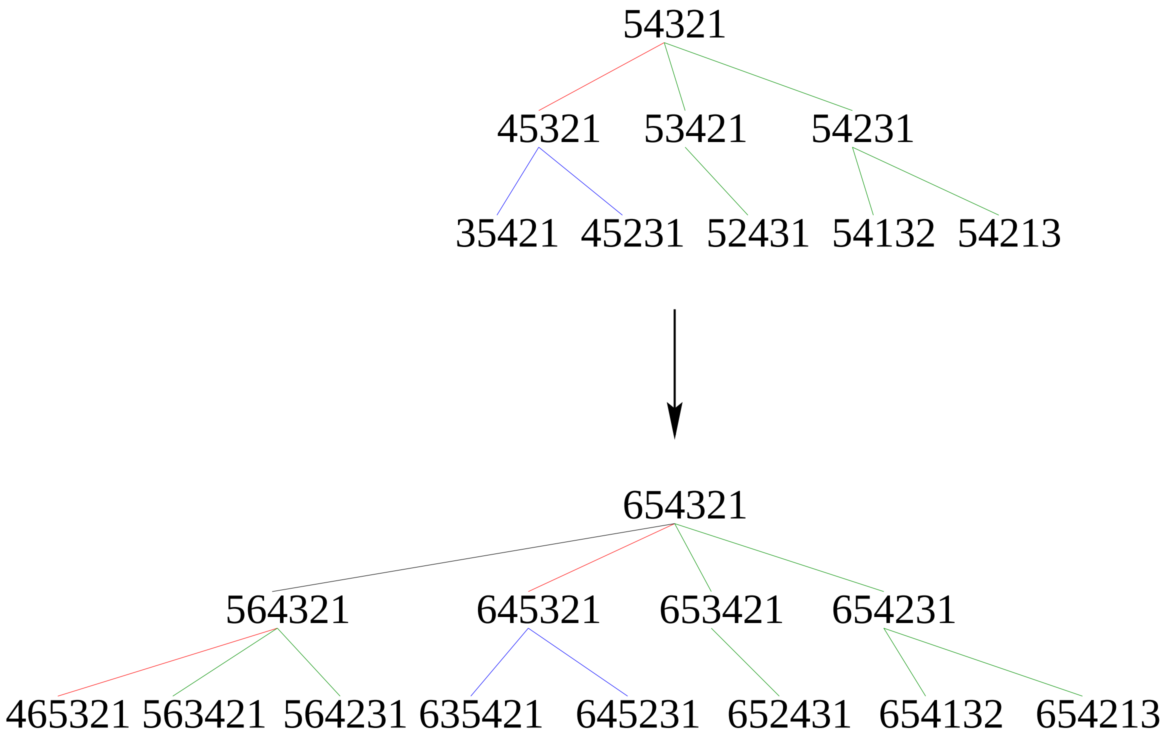
- Exemple : $\mathbf{m} = \mathbf{3}$, $\mathbf{n} = 3, 4$:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{4,2,1,\mathbf{3}} &= (\mathbf{X}_{1,3,2} - \mathbf{X}_{2,1,3}) && e_3 \\ &\quad -\mathbf{X}_{2,3,1} && e_2 \\ &\quad +(\mathbf{X}_{3,2,1}) && e_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{5,4,2,1,\mathbf{3}} &= (\mathbf{X}_{\mathbf{4},1,3,2} - \mathbf{X}_{\mathbf{4},2,1,3} + \mathbf{X}_{2,\mathbf{4},3,1}) && e_4 \\ &\quad -(\mathbf{X}_{\mathbf{4},2,3,1} + \mathbf{X}_{3,\mathbf{4},2,1}) && e_3 \\ &\quad +(\mathbf{X}_{\mathbf{4},3,2,1}) && e_2 \end{aligned}$$

Structure multiplicative[(4)]

- Récurrence entre les développements de $\mathbf{X}_{6,5,4,2,1,3}$ en terme de $\mathbf{X}_\mu, \mu \in \mathfrak{S}_5$ et $\mathbf{X}_{7,6,5,4,2,1,3}$ en terme de $\mathbf{X}_\mu, \mu \in \mathfrak{S}_6$:



L'algorithme

- Opérateurs $P_0^n, P_1^n, \ldots, P_k^n$ sur les permutations (insertion de n dans $\mu \in \mathfrak{S}_{n-1}$) :

$$\begin{array}{ccccl} \mu & \longrightarrow & P_0^n(\mu) & = & (\ n\ \mu) \\ \mu & \longrightarrow & P_1^n(\mu) & = & (\mu_1\ n\ \mu_2 \ldots) \\ \vdots & \longrightarrow & \vdots & = & \vdots \\ \mu & \longrightarrow & P_k^n(\mu) & = & (\mu_1 \ldots \mu_{k-1}\ n\ \mu_k \ldots) \end{array}$$

Proposition 7 *Soit $\mathcal{R}(n,m)$ défini par :*

$$\begin{cases} e_1 \mathbf{X}_{n,n-1,\ldots,2,1} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} P_{n-k}^n(\mathcal{R}(n-1,k))_{e_j \leftarrow e_{j+1}}\ , & \\ \hfill \text{si } m = n & , \\ P_0^n(\mathcal{R}(n-1,m))_{e_j \leftarrow e_{j+1}} - P_1^n(\mathcal{R}(n-1,m))_{e_j \leftarrow e_{j+2}} & , \\ \hfill \text{autrement} & . \end{cases}$$

Alors, $\mathcal{R}(n,m)$ est exactement égal au polynôme de Schubert indicé par la permutation :

$$(n+1, n, \ldots, \widehat{m}, \ldots, 2, 1, m) \quad .$$

Algebraic Combinatorics Environment[(1)]

- Boîte à outils *Maple* pour la combinatoire algébrique ;
- Plusieurs bibliothèques de fonctions (packages) ;
- 50000 lignes de programmes pour 400 fonctions ;

- Packages sur les groupes :

  `SG` Groupes symétriques.
  `CG` Groupes de Lie classiques. (Eppstein)
  `BN` Groupes hyperoctaédraux.

- Packages de calcul dans différentes algèbres :

  `BNA` Algèbre hyperoctaédrale.
  `SGA` Algèbre du groupe symétrique.
  `NCA` Algèbre nilCoxeter.
  `IDCA` Algèbre idCoxeter.
  `HEKA` Algèbre de Hecke.

$\boxed{\text{ACE}^{(2)}}$

- Packages de manipulations d'objets combinatoires :

  `CLG` Caractères du groupe linéaire.

  `NCSF` Fonctions symétriques non commutatives. (Ung)

  `SP` Polynômes de Schubert.

  `SYMF` Fonctions symétriques.

  `TAB` Tableaux de Young.

- Packages de manipulation de polynômes :

  `FM` Module libre sur les fonctions symétriques.

- Packages sur les représentations :

  `SHRI` Représentations de l'algèbre de Hecke. (Laugerotte)

  `FOCK` Représentations de $U_q(\widehat{sl}_n)$. (Leclerc, Thibon)

Objectif : expérimenter en calculant

Distribution des calculs

- Calculs très demandeurs en ressources ;

↝ Distribuer les calculs ;

- Utilisation de `PVM` ;
- Plusieurs expériences réalisées ;

- **Objectif** à court terme :

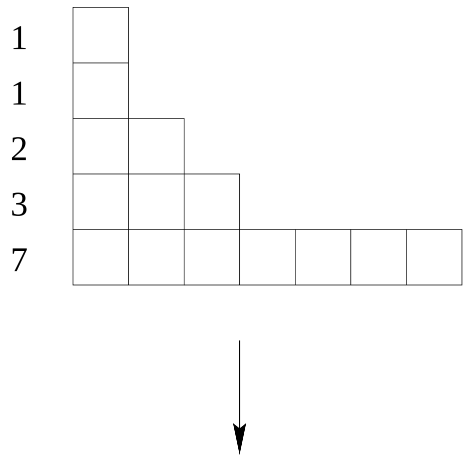
Vision plus précise du potentiel
de puissance d'un parc de machines

- **Objectif** à plus long terme :

Mise en place d'un système distribué
de calcul en Combinatoire Algébrique

Tableaux de Young

- Tableau de Young = remplissage d'un diagramme de Ferrers :

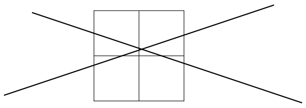


8						
6						
3	5					
2	2	6				
1	1	1	2	4	4	7

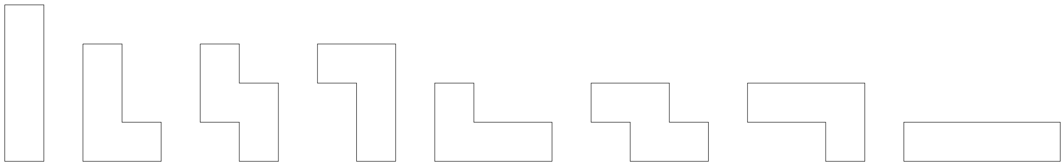
- Forme $\lambda = (7, 3, 2, 1, 1)$;
- Poids $\mu = (3, 3, 1, 2, 1, 2, 1, 1)$.

Rubans

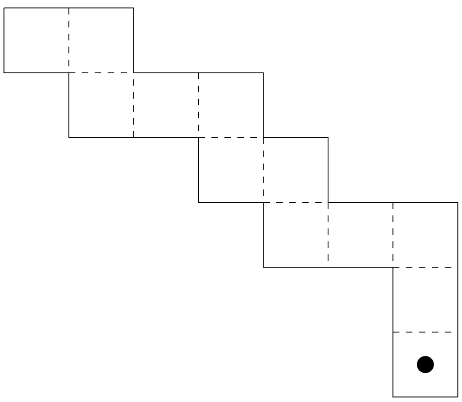
- k-ruban : diagramme connexe de k boîtes ;



- 2^{k-1} k-rubans différents pour un k donné ;
- Exemple pour $k = 4$:

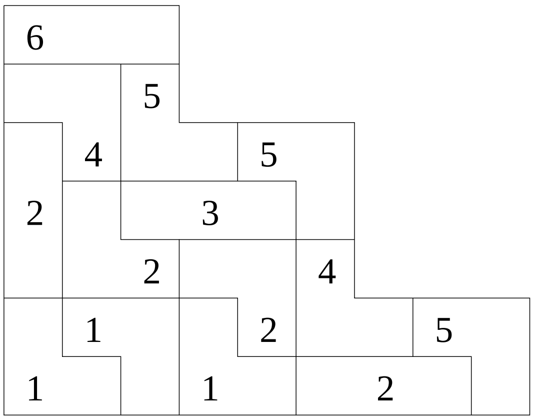


- Racine d'un ruban :

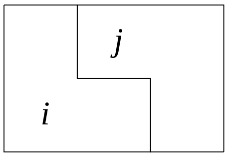


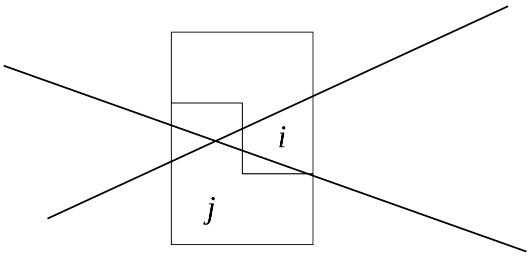
Tableaux de rubans[1]

- Tableau de rubans : généralisation d'un tableau de Young ;
- Exemple d'un tableau de 3-rubans :



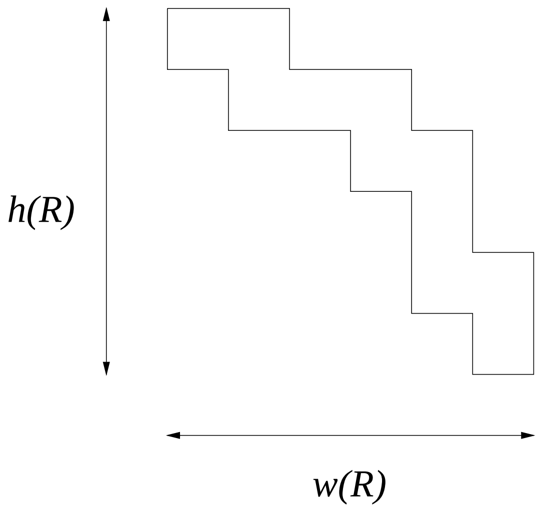
- Exemple de conditions de croissance sur les colonnes, $i \leq j$:





Polynômes de spin[1]

- Spin : statistique sur les tableaux de rubans ;
- Hauteur d'un ruban :

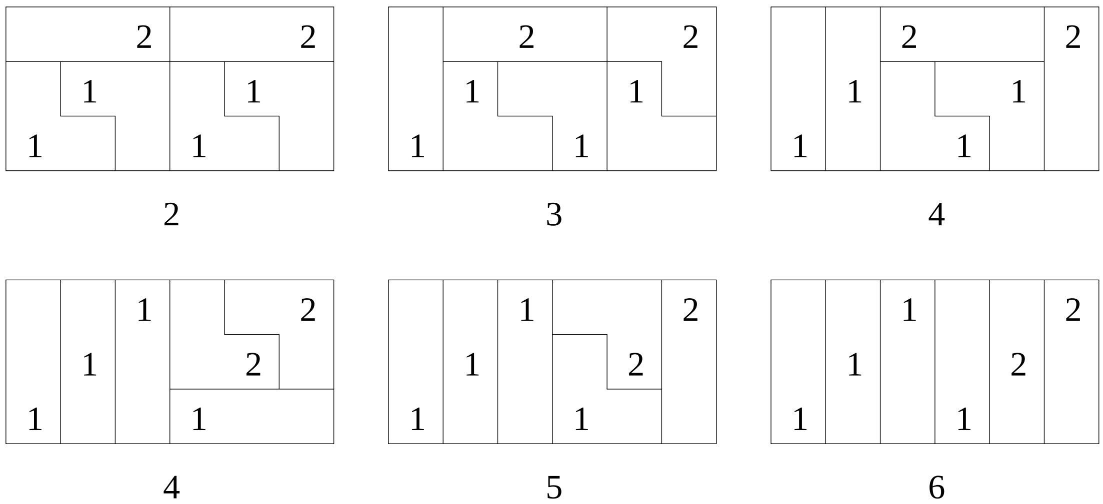


- Spin d'un ruban R : $$s(R) := \frac{h(R)-1}{2}.$$
- Spin d'un tableau T : $$s(T) := \sum_{R\in T} s(R).$$
- Polynôme de spin :

$$G^{(k)}_{\lambda,\mu}(q) := \sum_{T\in\mathrm{Tab}_k(\lambda,\mu)} q^{s(T)} \quad .$$

Polynômes de spin[(2)]

- Exemple : forme $\lambda = (6,6,6)$, poids $\mu = (4,2)$:



$$G^{(3)}_{(6,6,6),(4,2)}(q) = q^2 + q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6 \quad .$$

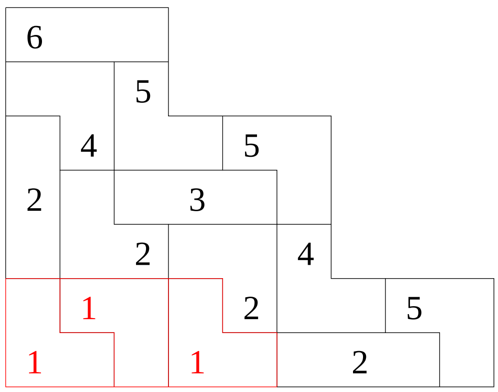
- Codage matriciel :

$$\begin{array}{cccccc} 0&0&3&0&0&3\\ 0&3&3&0&3&3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 0&0&0&3&0&3\\ 3&0&3&3&0&3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 0&0&0&0&3&3\\ 3&3&0&3&3&0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0&0&0&0&3&3\\ 3&3&3&0&0&3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 0&0&0&0&3&3\\ 3&3&3&0&3&0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 0&0&0&0&3&3\\ 3&3&3&3&0&0 \end{array}$$

Décodage(1)

- $\lambda = (9,9,6,6,6,3,3)$, $\mu = (3,4,1,2,3,1)$:

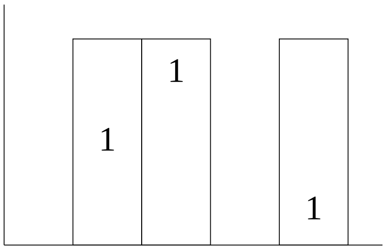


- Codage matriciel :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Décodage$^{(2)}$

- Emplacements des racines :



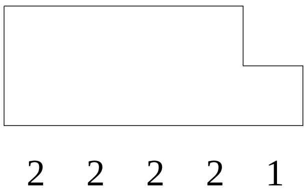
- Repliage les rubans :

$$
\begin{array}{rccccccccc}
 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
+ & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
\hline
= & 8 & 10 & 9 & 5 & 7 & 3 & 2 & 1 & 0
\end{array}
$$

- Tri du vecteur obtenu, puis décodage :

$$
\begin{array}{rccccccccc}
 & 10 & 9 & 8 & 7 & 5 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
- & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
\hline
= & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$\rightsquigarrow$ forme conjuguée :



Décodage(3)

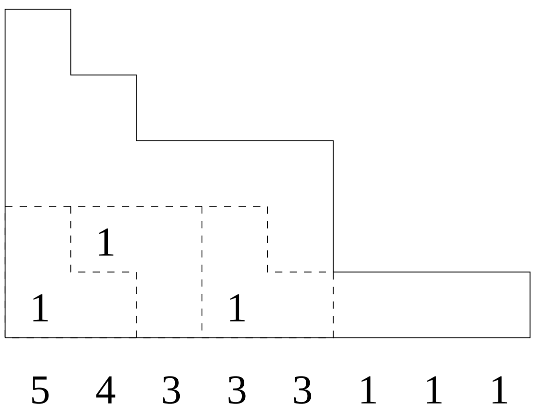
- Pour les rubans 2, on part du vecteur trié :

$$
\begin{array}{rccccccccc}
 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
+ & 10 & 9 & 8 & 7 & 5 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
\hline
= & 13 & 9 & 11 & 7 & 8 & 3 & 2 & 4 & 0
\end{array}
$$

- Tri du vecteur obtenu, puis décodage :

$$
\begin{array}{rccccccccc}
 & 13 & 11 & 9 & 8 & 7 & 4 & 3 & 2 & 0 \\
- & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
\hline
= & 5 & 4 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

$\rightsquigarrow$ forme conjuguée :



Polynôme de spin[3]

- Soit I le nombre d'inversions du vecteur à trier ;
- **Remarque** : $I = \sum_R (w(R) - 1)$.
- On montre que le spin d'un tableau est :

$$s(T) = \frac{n(k-1) - I}{2} \quad .$$

- Le polynôme de spin est alors :

$$G^{(k)}_{\lambda,\mu}(q) = q^{\frac{|\mu|(k-1)}{2}} F^{(k)}_{\alpha,\mu}(q^{-\frac{1}{2}}) \quad ,$$

où $\alpha = \lambda' + \rho_s$ et :

$$F^{(k)}_{\alpha,\mu}(q) := \sum_{T \in \mathrm{Tab}_k(\lambda,\mu)} q^I \quad ,$$

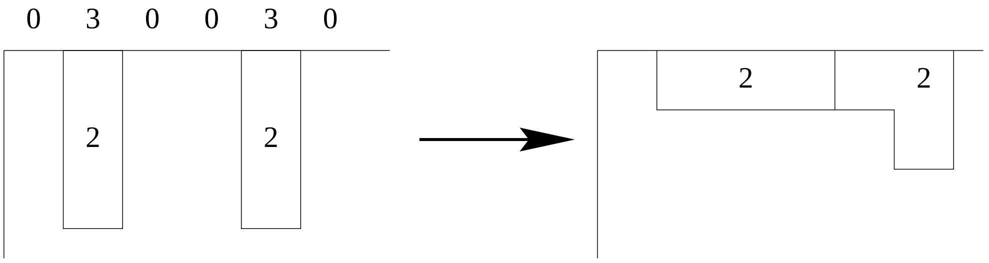
se calcule par récurrence :

$$\boxed{F^{(k)}_{\alpha,\mu}(q) := \sum_{p=1}^{m} q^{I_p} F^{(k)}_{\alpha_p,\mu^*}(q)}$$

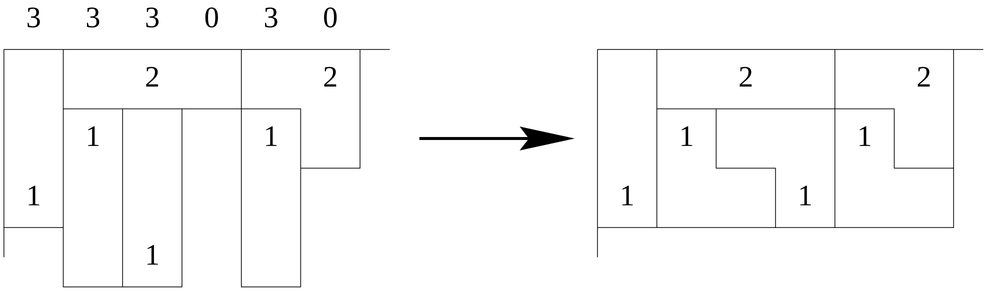
avec $\mu^* := (\mu_1, \ldots, \mu_{r-1})$.

Algorithme récursif

- Inverser l'algorithme de décodage :
  - on part de la forme souhaitée ;
  - on pèle la forme au fur et à mesure ;
  - on se rappelle de I pour calculer le spin.
- Exemple : on commence à replier les rubans 2 :



- On termine par les rubans 1 :



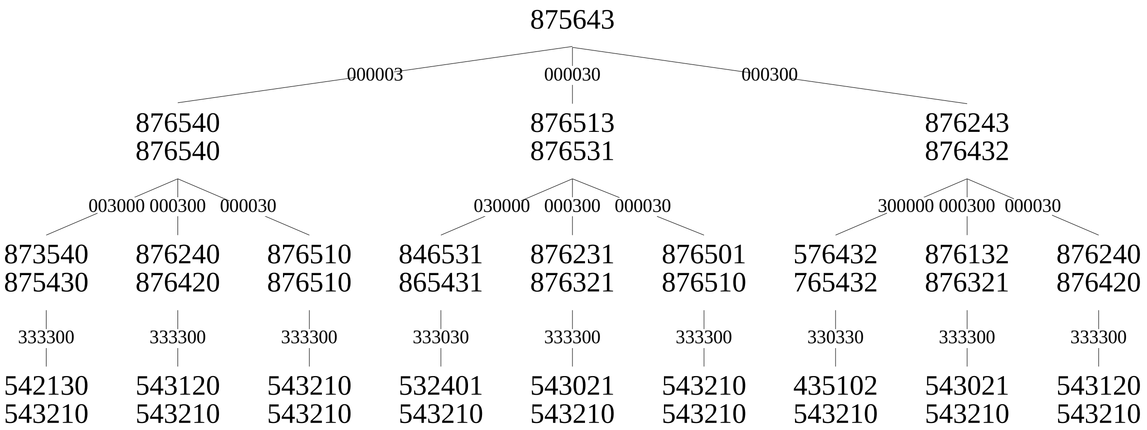
Exemple

- Pavage de la forme $\lambda = (18, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18)$ avec un poids $\mu = (4, 4, 4, 4, 4, 4)$:

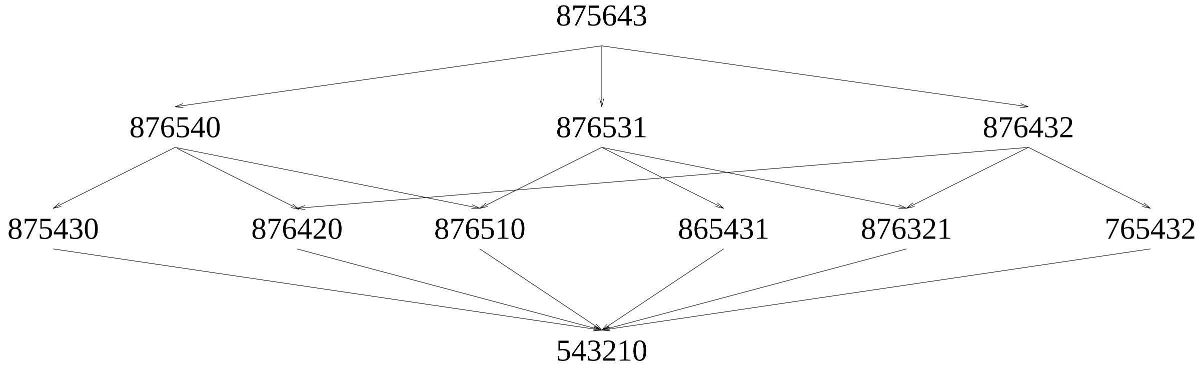
```
$ ribbon -tasks 30 -nb -labels -data -spinpoly -graphstats
Input data          : 8 18 18 18 18 18 18 18 18 6 4 4 4 4 4 4
Number of solutions : 1079706100
Spin polynomial     : 5*q^6+75*q^7+554*q^8+2835*q^9+
                      11530*q^10+39470*q^11+117927*q^12+314030*q^13+
                      756571*q^14+1665504*q^15+3375529*q^16+6332801*q^17+
                      11046379*q^18+17976562*q^19+27375288*q^20+
                      39109524*q^21+52541166*q^22+66516023*q^23+
                      79511677*q^24+89908914*q^25+96335442*q^26+
                      97959748*q^27+94667092*q^28+87048607*q^29+
                      76241169*q^30+63654091*q^31+50690602*q^32+
                      38513325*q^33+27917667*q^34+19299417*q^35+
                      12713296*q^36+7968919*q^37+4743509*q^38+
                      2673314*q^39+1420871*q^40+708146*q^41+
                      328508*q^42+140270*q^43+54314*q^44+18589*q^45+
                      5424*q^46+1236*q^47+180*q^48

Graph statistics     :
              height: 6
          level info: (1/1) (120/700) (1531/2800) (3006/5600)
                      (1531/2800) (165/700)
     number of nodes: 6354
    max nb daughters: 120 239 211 113 36 1
```

Parallélisation[(1)]

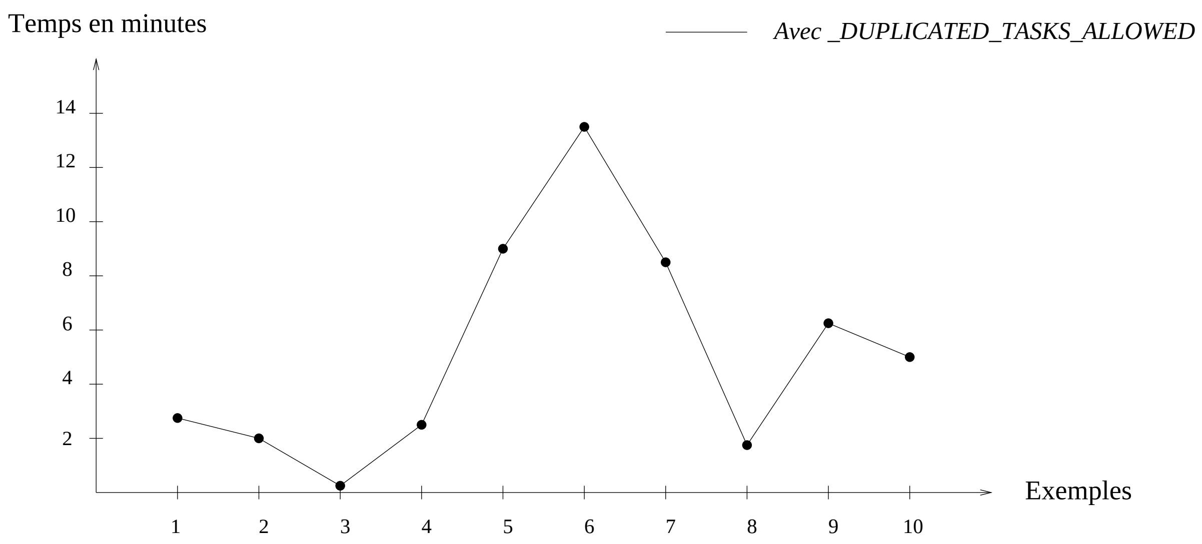
- Distribution des appels récursifs ;
- Exemple : $\lambda = (6, 6, 6)$, $\mu = (4, 1, 1)$:

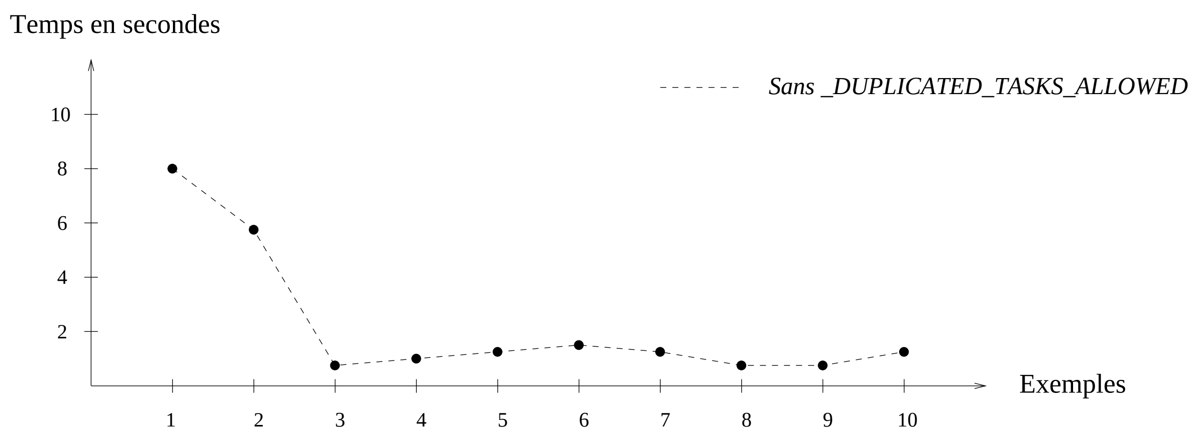


Plusieurs branches conduisent à des nœuds identiques

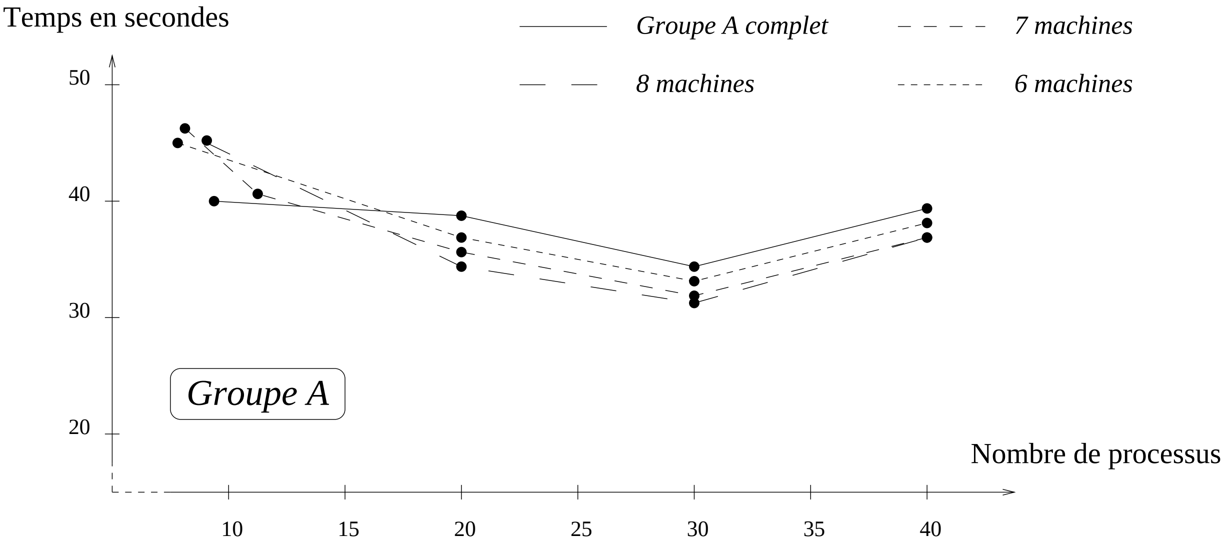


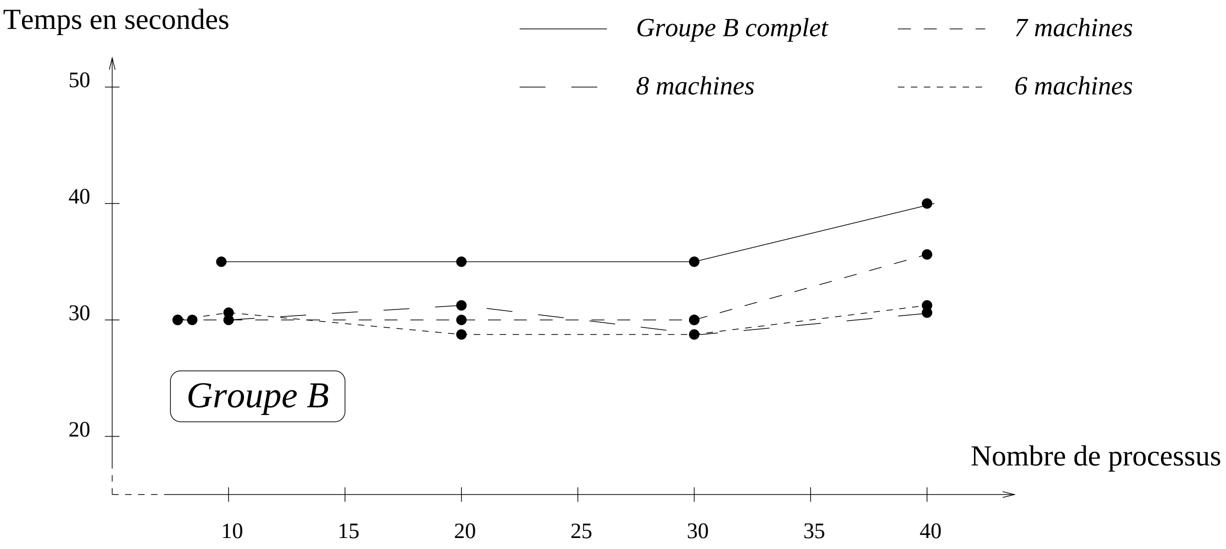
Résultat


Temps en minutes
Avec _DUPLICATED_TASKS_ALLOWED
14
12
10
8
6
4
2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Exemples

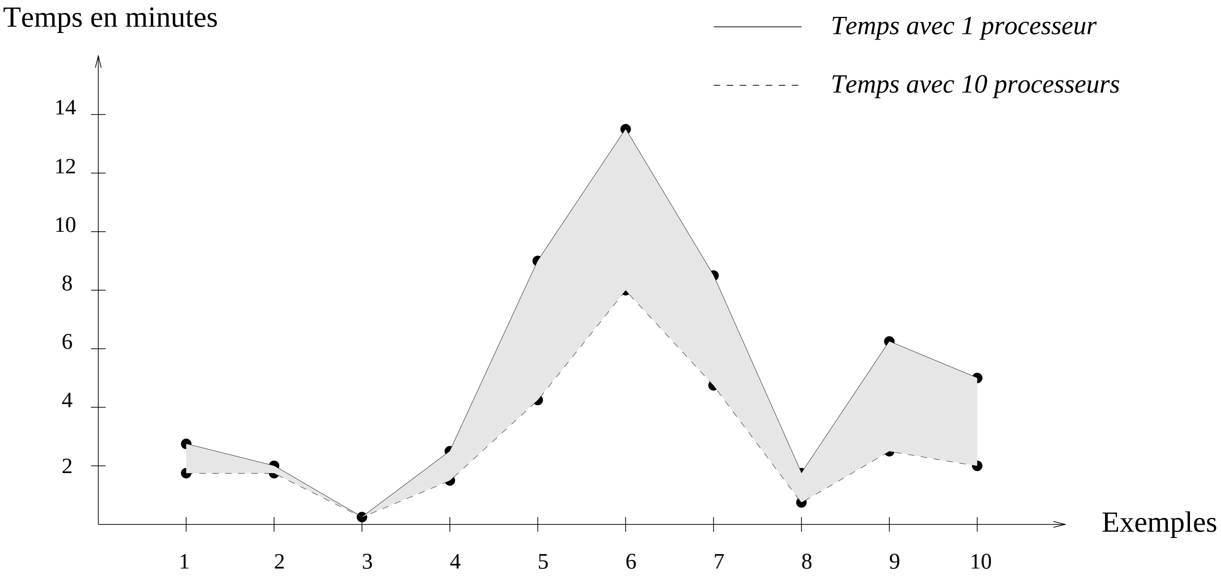

Temps en secondes
Sans _DUPLICATED_TASKS_ALLOWED
10
8
6
4
2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Exemples

Influence du nombre de processus





Influence du nombre de processeurs

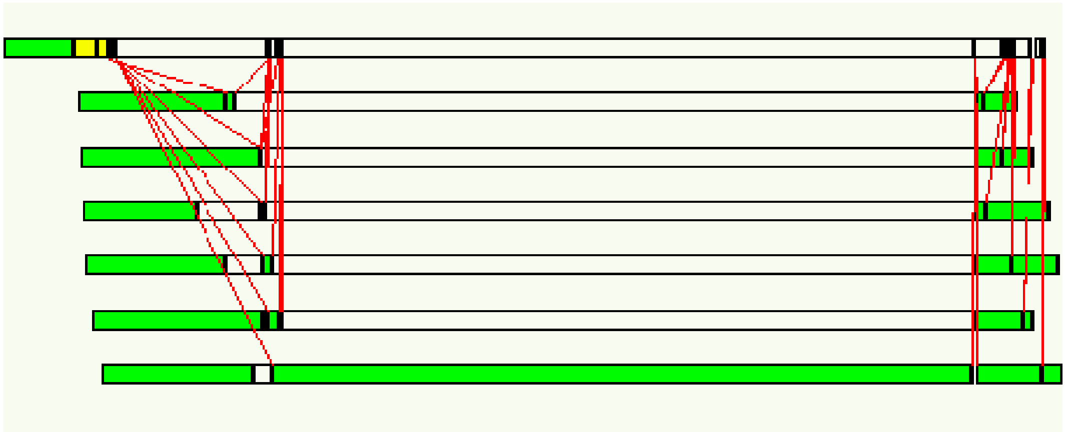


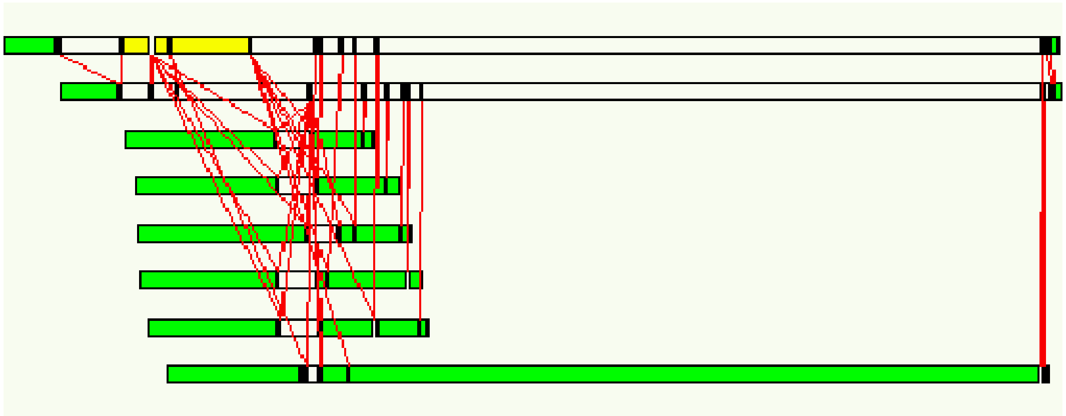
gain de 40%

923 497 397 222 400 tableaux de rubans de forme $(36, 36, 18, 18, 18, 18)$ et d'évaluation (1^{24})

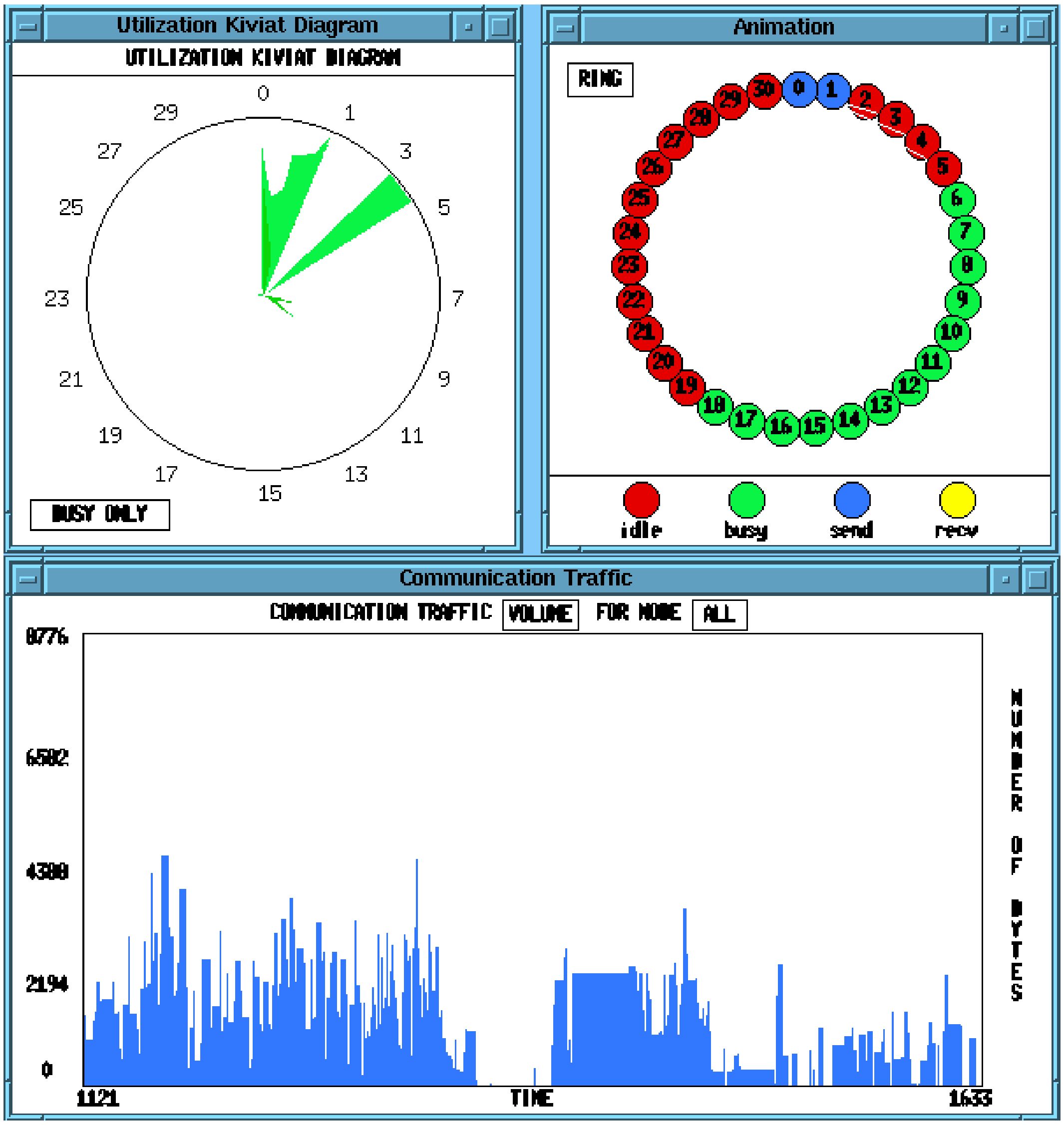
Analyse de performance[1]

- Surcouche PVM ⇝ Paragraph ;
- Modification de PGPVM ⇝ PGPVM2 :

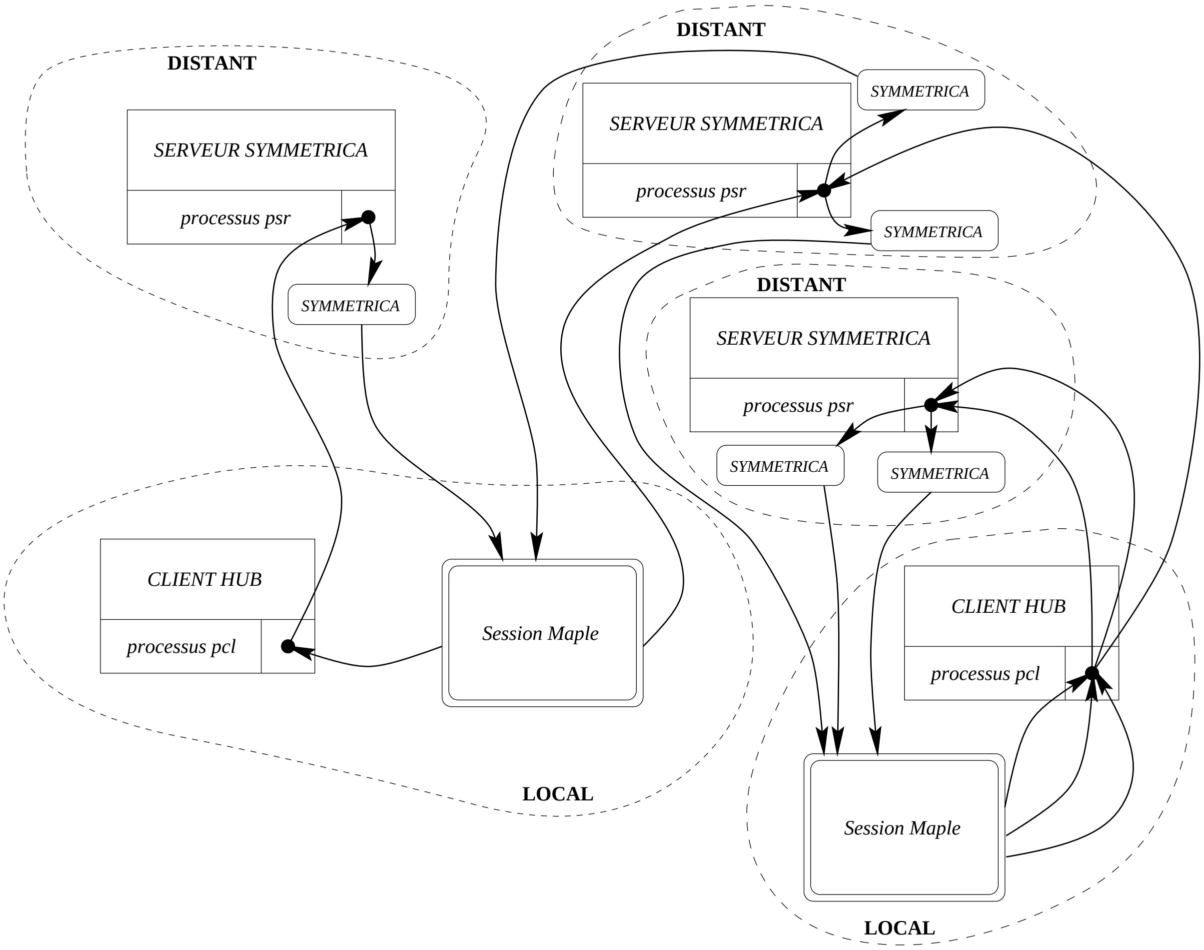




Analyse de performance(2)



Concentrateur de ressources



Et maintenant...

Et maintenant, buvons car l'affaire était chaude.

V. Hugo