

Haskell (IR3) – Arbres Binaires

Stéphane Vialette

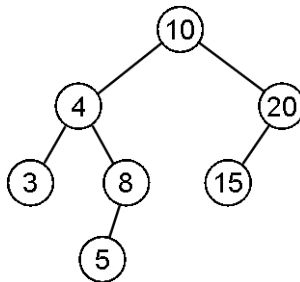
16 octobre 2019

Question 1: Arbres binaires sur les entiers

Considérons la variante suivante du type récursif des arbres binaires sur les entiers, défini par :

```
data BinIntTree = Empty | Branch BinIntTree Int BinIntTree
    deriving (Show)
```

(a) Écrire une expression Haskell, de type `BinIntTree`, qui représente l'arbre suivant.



Dans la suite, nous supposons que cet exemple est retourné par la fonction :

```
binIntTreeExample :: BinIntTree.
```

Les fonctions haskell suivantes vous permettront de visualiser plus facilement vos arbres :

```
indent :: [String] -> [String]
indent = map (" " ++)
```

```
layoutTree :: BinIntTree -> [String]
layoutTree Empty = []
layoutTree (Branch left x right) = indent (layoutTree right) ++
    [show x] ++
    indent (layoutTree left)
```

```
prettyTree :: BinIntTree -> String
prettyTree = unlines . layoutTree
```

Nous pouvons les utiliser de la façon suivante :

```
*Main> putStrLn $ prettyTree binIntTreeExample
      20
     15
    10
     8
    5
   4
  3

*Main>
```

Solution:

On peut définir l'arbre pas à pas dans `ghci` :

```
ghci: let bt3  = Branch Empty 3 Empty
ghci: let bt5  = Branch Empty 5 Empty
ghci: let bt8  = Branch bt5 8 Empty
ghci: let bt4  = Branch bt4 4 bt8
ghci: let bt15 = Branch Empty 15 Empty
ghci: let bt20 = Branch bt15 20 Empty
ghci: let bt10 = Branch bt4 10 bt20
ghci:
```

Le mieux est de définir cet exemple via une fonction pour tester rapidement les fonctions que vous devez écrire :

```
binIntTree = bt10
  where
    bt3  = Branch Empty 3 Empty
    bt5  = Branch Empty 5 Empty
    bt8  = Branch bt5 8 Empty
    bt4  = Branch bt3 4 bt8
    bt15 = Branch Empty 15 Empty
    bt20 = Branch bt15 20 Empty
    bt10 = Branch bt4 10 bt20
```

(b) Écrire la fonction

```
emptyBinIntTree :: BinIntTree
```

qui retourne un arbre binaire de recherche vide.

Solution:

```
emptyBinIntTree :: BinIntTree
emptyBinIntTree = Empty
```

(c) Écrire la fonction

```
sizeBinIntTree :: Num a => BinIntTree -> a
```

qui retourne le nombre de nœuds dans un arbre binaire.

Solution:

```
sizeBinIntTree :: Num a => BinIntTree -> a
sizeBinIntTree Empty = 0
sizeBinIntTree (Branch left _ right) = sizeLeft + 1 + sizeRight
```

```

where
    sizeLeft  = sizeBinIntTree left
    sizeRight = sizeBinIntTree right

```

Autre possibilité :

```

sizeBinIntTree' :: BinIntTree -> Int
sizeBinIntTree' = aux 0
where
    aux acc Empty = acc
    aux acc (Branch left _ right) = let acc' = aux (1+acc) left
                                     in aux acc' right

```

(d) Écrire la fonction

```
maxBinIntTree :: BinIntTree -> Int
```

qui retourne l'étiquette maximale. Dans un premier temps (et pour simplifier), nous supposons que l'étiquette de l'arbre vide est `minBound :: Int`.

Solution:

```

maxBinIntTree :: BinIntTree -> Int
maxBinIntTree Empty = minBound
maxBinIntTree (Branch left x right) = maximum [maxLeft, x, maxRight]
where
    maxLeft  = maxBinIntTree left
    maxRight = maxBinIntTree right

```

(e) Écrire la fonction

```
minBinIntTree :: BinIntTree -> Int
```

qui retourne l'étiquette minimale. Dans un premier temps (et pour simplifier), nous supposons que l'étiquette de l'arbre vide est `maxBound :: Int`.

Solution:

```

minBinIntTree :: BinIntTree -> Int
minBinIntTree Empty = minBound
minBinIntTree (Branch left x right) = minimum [minLeft, x, minRight]
where
    minLeft  = minBinIntTree left
    minRight = minBinIntTree right

```

(f) (★) Pouvez vous extraire la logique des fonctions `maxBinIntTree` et `minBinIntTree` pour factoriser le code commun ?

Solution:

```

applyBinIntTree :: ([Int] -> Int) -> Int -> BinIntTree -> Int
applyBinIntTree _ b Empty = b
applyBinIntTree f b (Branch left x right) = f [left', x, right']
where
    left'  = applyBinIntTree f b left
    right' = applyBinIntTree f b right

maxBinIntTree' :: BinIntTree -> Int
maxBinIntTree' = applyBinIntTree maximum (minBound :: Int)

```

```
minBinIntTree' :: BinIntTree -> Int
minBinIntTree' = applyBinIntTree minimum (maxBound :: Int)
```

(g) (*) Écrire maintenant les fonctions

```
maxBinIntTree' :: BinIntTree -> Maybe Int
minBinIntTree' :: BinIntTree -> Maybe Int
```

qui retournent les étiquettes maximales et minimales (respectivement) d'un arbre binaire. Cette fois ci, l'étiquette de l'arbre vide est **Nothing**.

```
*Main> maxBinIntTree' emptyBinIntTree
Nothing
*Main> maxBinIntTree' binIntTreeExample
Just 20
*Main> minBinIntTree' emptyBinIntTree
Nothing
*Main> minBinIntTree' binIntTreeExample
Just 3
*Main>
```

Solution:

On remarque que :

```
ghci> maximum [Nothing]
Nothing
ghci> maximum [Nothing, Just 1]
Just 1
ghci> maximum [Just 2, Nothing, Just 1]
Just 2
ghci> maximum [Just 2, Nothing, Just 1, Nothing, Just 3]
Just 3
```

Essayez d'en déduire la logique. Il semble que maximum peut s'écrire de la façon suivante :

```
maximum [] = error "*** Exception: maximum: empty list"
maximum [x] = x
maximum (Nothing : xs) = maximum xs
maximum (Just x : xs) = case maximum xs of
    Nothing -> Just x
    Just x' -> if x > x' then Just x else Just x'
```

On peut alors en déduire facilement la fonction `maxBinIntTree'` :

```
import qualified Data.Maybe as Maybe

maxBinIntTree' :: BinIntTree -> Maybe Int
maxBinIntTree' Empty = Nothing
maxBinIntTree' (Branch left x right) = maximum ms
  where
    maxLeft = maxBinIntTree' left
    maxRight = maxBinIntTree' right
    ms = [maxLeft, Just x, maxRight]

minBinIntTree' :: BinIntTree -> Maybe Int
minBinIntTree' Empty = Nothing
minBinIntTree' (Branch left x right) = minimum ms
```

```

where
  minLeft  = minBinIntTree'' left
  minRight = minBinIntTree'' right
  ms      = filter (isJust) [minLeft, Just x, minRight]

```

(h) Écrire la fonction

`heightBinIntTree` :: (**Ord** a, **Num** a) => **BinIntTree** -> a
qui retourne la hauteur de l'arbre binaire. La hauteur de l'arbre vide est 0.

Solution:

```
heightBinIntTree :: (Ord a, Num a) => BinIntTree -> a
heightBinIntTree Empty = 0
heightBinIntTree (Branch left _ right) = 1 + max heightLeft heightRight
  where
    heightLeft  = heightBinIntTree left
    heightRight = heightBinIntTree right
```

(i) Écrire la fonction

```
searchBinIntTree :: BinIntTree -> Int -> Bool
```

qui retourne **True** si un entier donné apparaît dans un arbre binaire.

Solution:

```
searchBinIntTree :: BinIntTree -> Int -> Bool
searchBinIntTree Empty _ = False
searchBinIntTree (Branch left x right) y = x == y      ||
                                              searchleft    ||
                                              searchRight

where
  searchleft  = searchBinIntTree left y
  searchRight = searchBinIntTree right y
```

(j) Écrire la fonction

```
binIntTreeToList :: BinIntTree -> [Int]
```

qui retournera la liste des entiers qui apparaissent dans un arbre binaire.

Solution:

```
binIntTreeToList :: BinIntTree -> [Int]
binIntTreeToList Empty = []
binIntTreeToList (Branch left x right) = [x] ++
                                         leftList ++
                                         rightList

where
    leftList  = binIntTreeToList left
    rightList = binIntTreeToList right
```

Autre solution :

```
binIntTreeToList' :: BinIntTree -> [Int]
binIntTreeToList' = aux []
  where
    aux acc Empty = acc
    aux acc (Branch left x right) = let acc' = aux (x : acc) left
                                     in aux acc' right
```

Question 2: Arbres binaires de recherche sur les entiers

Nous nous intéressons maintenant aux arbres binaires de recherche : les éléments dans le sous-arbre gauche sont inférieurs ou égaux à la racine, et ceux du sous-arbre droit sont supérieurs.

(a) Écrire la fonction

```
searchBinIntTree' :: BinIntTree -> Int -> Bool
```

qui retourne **True** si un entier donné apparaît dans un arbre binaire de recherche.

Solution:

```
searchBinIntTree' :: BinIntTree -> Int -> Bool
searchBinIntTree' Empty _ = False
searchBinIntTree' (Branch left x right) y
  | x == y    = True
  | x >= y    = searchBinIntTree' left y
  | otherwise = searchBinIntTree' right y
```

(b) Écrire la fonction

```
insertBinIntTree :: BinIntTree -> Int -> BinIntTree
```

qui insère un entier dans un arbre binaire de recherche.

Solution:

```
insertBinIntTree :: BinIntTree -> Int -> BinIntTree
insertBinIntTree Empty y = Branch Empty y Empty
insertBinIntTree (Branch left x right) y
  | y <= x    = Branch (insertBinIntTree left y) x right
  | otherwise = Branch left x (insertBinIntTree right y)
```

Il est très important de remarquer que l'on reconstruit l'arbre binaire à chaque niveau.

(c) Écrire la fonction

```
deleteLargestInBinIntTree :: BinIntTree -> Maybe (Int, BinIntTree)
```

qui retourne une paire contenant l'élément maximum et l'arbre binaire de recherche obtenu en supprimant cet élément.

```
*Main> deleteLargestInBinIntTree emptyBinIntTree
Nothing
*Main> binIntTree
Branch (Branch (Branch Empty 3 Empty) 4 (Branch (Branch Empty 5 Empty) 8
Empty)) 10 (Branch (Branch Empty 15 Empty) 20 Empty)
*Main> deleteLargestInBinIntTree binIntTree
Just (20, Branch (Branch (Branch Empty 3 Empty) 4 (Branch (Branch Empty
5 Empty) 8 Empty)) 10 (Branch Empty 15 Empty))
*Main>
```

Solution:

```
deleteLargestInBinIntTree :: BinIntTree -> Maybe (Int, BinIntTree)
deleteLargestInBinIntTree Empty = Nothing
deleteLargestInBinIntTree (Branch left x Empty) = Just (x, left)
deleteLargestInBinIntTree (Branch left x right) =
  case deleteLargestInBinIntTree right of
    Nothing    -> Nothing
    Just (y, right') -> Just (y, Branch left x right')
```

(d) Écrire la fonction

`deleteBinIntTree :: BinIntTree -> Int -> BinIntTree`

qui supprime - s'il existe - un entier dans un arbre binaire de recherche.

```
*Main> putStrLn $ prettyTree $ deleteBinIntTree binIntTreeExample 5
      20
     /  \
    10   15
   /  \
  4    8
 /
3

*Main> putStrLn $ prettyTree $ deleteBinIntTree binIntTreeExample 8
      20
     /  \
    10   15
   /  \
  4    5
 /
3

*Main> putStrLn $ prettyTree $ deleteBinIntTree binIntTreeExample 3
      20
     /  \
    10   15
   /  \
  4    8
   \   \
    5   5

*Main> putStrLn $ prettyTree $ deleteBinIntTree binIntTreeExample 10
      20
     /  \
    8   15
   /  \
  4    5
 /
3

*Main>
```

Question 3: Arbres binaires de recherche

Modifier votre code pour obtenir des arbres de recherche polymorphes. En même temps, organiser votre code sous forme d'un module `BinTree`.

Question 4: Pour aller plus loin

Écrire les fonctions permettant de fusionner 2 puis plusieurs arbres binaires de recherche.