Haskell (Info 3) – Arbres Binaires

Fabian Reiter (fabian.reiter@univ-eiffel.fr)
Stéphane Vialette (stephane.vialette@univ-eiffel.fr)

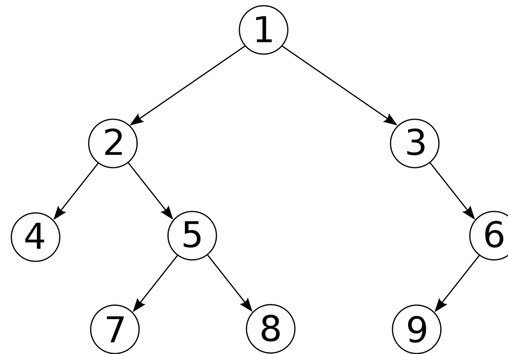
1er novembre 2021

Question 1: Arbres binaires

Considérons la variante suivante du type récursif des arbres binaires sur les entiers, défini par :

```
data BTree a = Empty | Branch (BTree a) a (BTree a)
                deriving (Show)
```

(a) Écrire une expression Haskell, de type `BTree`, qui représente l'arbre suivant.



Pour simplifier, dans la suite, nous supposerons que cet arbre est retourné par la fonction `exampleBT :: BTree Int`.

Attention, si vous laissez haskell inférérer le typage de la fonction, vous aller sans doute obtenir `exampleBT :: BTree Integer`. Mais le type `Integer` n'implémente pas la classe `Bounded` (c'est bien normal pour des entiers arbitrairement longs) alors que cette contrainte de classe est nécéssaire dans la suite du TP.

Les fonctions haskell suivantes vous permettrons de visualiser plus facilement vos arbres :

```
indent :: Int -> String
indent = flip L.replicate '.'

str :: (Show a) => BTree a -> String
str = aux 0
  where
    aux k Empty              = indent k ++ "⊥\n"
    aux k (Branch lt x rt)   = indent k ++ show x ++ "\n" ++
                               aux (k+1) lt ++ aux (k+1) rt
```

Nous pouvons les utiliser de la façon suivante :

```
ghci> let s = str exampleBT in putStrLn s
1
.2
..4
...⊥
...⊥
..5
...7
....⊥
....⊥
...8
....⊥
....⊥
.3
..⊥
..6
...9
....⊥
....⊥
...⊥
```

Solution:
On peut définir l'arbre pas à pas dans `ghci` (pas très pratique !).

```
ghci> bt9 = Branch Empty 9 Empty
ghci> bt8 = Branch Empty 8 Empty
ghci> bt7 = Branch Empty 7 Empty
ghci> bt6 = Branch bt9   6 Empty
ghci> bt5 = Branch bt7   5 bt8
ghci> bt4 = Branch Empty 4 Empty
ghci> bt3 = Branch Empty 3 bt6
ghci> bt2 = Branch bt4   2 bt5
ghci> bt1 = Branch bt2   1 bt3
```

Le mieux est de définir cet example via une fonction pour tester rapidement les fonctions que vous allez écrire.

```
exampleBT :: BTree Int
exampleBT = bt1
  where
    bt9 = Branch Empty 9 Empty
    bt8 = Branch Empty 8 Empty
    bt7 = Branch Empty 7 Empty
    bt6 = Branch bt9   6 Empty
    bt5 = Branch bt7   5 bt8
    bt4 = Branch Empty 4 Empty
    bt3 = Branch Empty 3 bt6
    bt2 = Branch bt4   2 bt5
    bt1 = Branch bt2   1 bt3
```

(b) Écrire la fonction

```
emptyBT :: BTree a
```

qui retourne un arbre binaire vide.

Solution:
La fonction `emptyBT :: BTree a` n'a pas pour but de remplacer l'utilisation du constructeur `Empty` du type `BTree a`. Voyez la fonction `emptyBT :: BTree a` comme une fonction retournant un arbre binaire particulier. La fonction ne présente de toute façon aucune difficulté.

```
emptyBT :: BTree a
emptyBT = Empty
```

(c) Écrire la fonction
`size :: Num b => BTree a -> b`
qui retourne le nombre de sommets dans un arbre binaire.

Solution:
Une solution récursive immédiate.

```
size :: Num b => BTree a -> b
size Empty            = 0
size (Branch l _ r)  = 1 + size l + size r
```

Une autre solution récursive - beaucoup plus efficace - qui utilise un accumulateur.

```
size' :: Num b => BTree a -> b
size' = aux 0
  where
    aux acc Empty            = acc
    aux acc (Branch l _ r)  = let aux (1 + acc') r
      where
        acc' = aux acc l
```

(d) Écrire les fonctions
`minBT :: (Ord a, Bounded a) => BTree a -> Maybe a`
`maxBT :: (Ord a, Bounded a) => BTree a -> Maybe a`
La fonction `minBT` (resp. `maxBT`) retourne l'étiquette minmale (resp. maximale) dans un arbre binaire. Si l'arbre binaire est vide, la fonction retourne `Nothing`.

Solution:
Pour les arbres binaires généraux, le maximum eut se trouver n'importe où. Il faut donc potentiellement parcourir tout l'arbre binaire.
On remarque que :

```
ghci> maximum [Nothing]
Nothing
ghci> maximum [Nothing, Just 1]
Just 1
ghci> maximum [Just 2, Nothing, Just 1]
Just 2
ghci> maximum [Just 2, Nothing, Just 1, Nothing, Just 3]
Just 3
```

et

```
ghci> minimum [Nothing]
Nothing
ghci> minimum [Nothing, Just 1]
Nothing
ghci> minimum [Just 2, Nothing, Just 1]
Nothing
ghci>  minimum [Just 2, Just 3, Just 1]
Just 1
```

Donc,
- `Nothing < Just x` quelque soit `x`.
- `Just x < Just y` si et seulement si `x < y`.

On peut maintenant en déduire facilement les fonctions `maxBT'` et `minBT'` (attention à l'écriture de `minBT'`, dès que l'on retourne `Nothing` on a un minimum)

```
minBT :: (Ord a) => BTree a -> Maybe a
minBT Empty                          = Nothing
minBT (Branch Empty x Empty)  = Just x
minBT (Branch l      x Empty)  = minimum [minBT l, Just x]
minBT (Branch Empty x r)       = minimum [          Just x, minBT r]
minBT (Branch l      x r)       = minimum [minBT l, Just x, minBT r]

maxBT :: (Ord a) => BTree a -> Maybe a
maxBT Empty              = Nothing
maxBT (Branch l x r) = maximum [maxBT l, Just x, maxBT r]
```

Attention à ne pas confondre les fonctions `max :: Ord a => a -> a -> a` et `maximum :: (Foldable t, Ord a) => t a -> a`. Par exemple,

```
maxBT :: (Ord a) => BTree a -> Maybe a
maxBT Empty              = Nothing
maxBT (Branch l x r) = max (maxBT l) (max (Just x) maxBT r)
```

(e) Écrire la fonction
`height :: (Ord b, Num b) => BTree a -> b`
qui retourne la hauteur de l'abre binaire. La hauteur de l'arbre vide est 0.

Solution:
Aucune difficulté ici.

```
height :: (Ord b, Num b) => BTree a -> b
height Empty              = 0
height (Branch l _ r) = 1 + max (height l) (height r)
```

(f) Écrire la fonction
`searchBT :: Eq a => BTree a -> a -> Bool`
qui retourne `True` si un entier donné apparaît dans un abre binaire.

Solution:
Nos arbres binaires ne sont pas des arbres binaires de recherche (pas encore!). En conséquence, une valeur peut se trouver à la racine, dans le sous-arbre gauche ou

dans le sous-arbre droit.

```
searchBT :: Eq a => BTree a -> a -> Bool
searchBT Empty _ = False
searchBT (Branch l x r) y
  | x == y        = True
  | otherwise     = searchBT l y || searchBT r y
```

On pourra même préférer la version suivante qui met en avant une logique basée explicitement sur les disjonctions.

```
searchBT' :: Eq a => BTree a -> a -> Bool
searchBT' Empty _          = False
searchBT' (Branch l x r) y = x == y || searchBT' l y || searchBT' r y
```

(g) Écrire la fonction

```
toList :: BTree a -> [a]
```

qui retourne la liste des éléments qui apparaissent dans un abre binaire. L'ordre des éléments n'est pas contraint. Par exemple,

```
ghci> toList exampleBT
[1,2,4,5,7,8,3,6,9]
```

Solution:

```
toList :: BTree a -> [a]
toList Empty          = []
toList (Branch l x r) = x : toList l ++ toList r
```

(h) Écrire les fonctions

```
preVisit :: BTree a -> [a]
inVisit :: BTree a -> [a]
postVisit :: BTree a -> [a]
```

qui retournent les éléments d'un arbre binaire par un parcours préfixe, infixe et suffixe. On pourra en profiter pour réécrire la fonction `toList`.

```
ghci> preVisit exampleBT
[1,2,4,5,7,8,3,6,9]
ghci> inVisit exampleBT
[4,2,7,5,8,1,3,9,6]
ghci> postVisit exampleBT
[4,7,8,5,2,9,6,3,1]
```

Solution:

```
preVisit :: BTree a -> [a]
preVisit Empty          = []
preVisit (Branch l x r) = x : preVisit l ++ preVisit r

inVisit :: BTree a -> [a]
inVisit Empty          = []
inVisit (Branch l x r) = inVisit l ++ [x] ++ inVisit r
```

```
postVisit :: BTree a -> [a]
postVisit Empty           = []
postVisit (Branch l x r) = postVisit l ++ postVisit r ++ [x]

toList :: BTree a -> [a]
toList = preVisit
```

(i) Écrire la fonction
`filterBT :: (a -> Bool) -> BTree a -> [a]`
qui retourne la liste des éléments d'un arbre binaire filtrée par un prédicat. Encore une fois, l'ordre des éléments n'est pas contraint.

```
ghci> filterBT even exampleBT
[2,4,8,6]
ghci> filterBT odd exampleBT
[1,5,7,3,9]
ghci> filterBT (> 5) exampleBT
[7,8,6,9]
ghci> filterBT (< 0) exampleBT
[]
```

Solution:
On ne réinvente pas la poudre (on a maintenant `toList` et on connaît (très bien !) la fonction `filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]`).

```
filterBT :: (a -> Bool) -> BTree a -> [a]
filterBT f = filter f . toList
```

Plus généralement, cette fonction n'aurait pas vraiment de sens dans une API bien réfléchie. En effet, la fonction `toList :: BTree a -> [a]` est suffisante.

(j) Écrire la fonction
`mapBT :: (a -> b) -> BTree a -> BTree b`
qui retourne un **nouvel** arbre binaire obtenu en appliquant une fonction sur chaque élément d'un arbre binaire. Par exemple,

```
ghci> putStr $ str $ mapBT (+10) exampleBT
11
.12
..14
...⊥
...⊥
..15
...17
....⊥
....⊥
...18
....⊥
....⊥
.13
..⊥
..16
...19
....⊥
```

```
....⊥
...⊥
```

Solution:
Les données sont non mutables. Il faut donc reconstruire un arbre binaire.

```
mapBT :: (a -> b) -> BTree a -> BTree b
mapBT _ Empty = Empty
mapBT f (Branch l x r) = Branch l' x' r'
  where
    x' = f x
    l' = mapBT f l
    r' = mapBT f r
```

ou encore (pas forcement plus lisible !?)

```
mapBT' :: (a -> b) -> BTree a -> BTree b
mapBT' _ Empty          = Empty
mapBT' f (Branch l x r) = Branch (mapBT f l) (f x) (mapBT f r)
```

Question 2: Arbres binaires de recherche

Nous nous intéressons maintenant aux arbres binaires de recherche : les éléments dans le sous-arbre gauche sont inférieurs ou égaux à la racine, et ceux du sous-arbre droit sont strictement supérieurs.

(a) Écrire les fonctions

```
minBST :: (Ord a) => BTree a -> Maybe a
maxBST :: (Ord a) => BTree a -> Maybe a
searchBST :: (Ord a) => BTree a -> a -> Bool
```

Solution:

```
minBST :: BTree a -> Maybe a
minBST Empty                = Nothing
minBST (Branch Empty x _)   = Just x
minBST (Branch l      _ _)  = minBST l

maxBST :: BTree a -> Maybe a
maxBST Empty                = Nothing
maxBST (Branch _ x Empty)   = Just x
maxBST (Branch _ _ r)       = maxBST r

searchBST :: (Ord a) => BTree a -> a -> Bool
searchBST Empty _ = False
searchBST (Branch l x r) y
  | x == y     = True
  | y <= x     = searchBST l y
  | otherwise = searchBST r y
```

(b) Écrire la fonction

```
insertBST :: (Ord a) => BTree a -> a -> BTree a
```

qui insert un élément dans un arbre binaire de recherche (les doublons sont autorisés).

Solution:

```
insertBST :: (Ord a) => BTree a -> a -> BTree a
insertBST Empty y = Branch Empty y Empty
insertBST (Branch l x r) y
  | y <= x     = Branch (insertBST l y) x r
  | otherwise = Branch l                 x (insertBST r y)
```

Il est très important (**fondamental !**) d'observer que l'on reconstruit un arbre binaire à chaque appel.

(c) Écrire la fonction

`deleteLargestBST :: BTree a -> Maybe (a, BTree a)`

qui retourne une paire contenant l'élément maximum dans un arbre binaire de recherche et l'arbre binaire de recherche obtenu en supprimant cet élément. LA fonction retourne `Nothing` si l'arbre est vide.

Solution:

```
deleteLargestBST :: BTree a -> Maybe (a, BTree a)
deleteLargestBST Empty                = Nothing
deleteLargestBST (Branch l x Empty) = Just (x, l)
deleteLargestBST (Branch l x r)      = case deleteLargestBST r of
 Nothing       -> Nothing
 Just (y, r') -> Just (y, Branch l x r')
```

(d) Écrire la fonction

`deleteBST :: (Ord a) => BTree a -> a -> BTree a`

qui supprime - s'il existe - un élément dans un arbre binaire de recherche. La fonction retourne l'arbre non modifié si l'élément recherché ne se trouve pas dans l'arbre binaire de recherche. Pensez à utiliser `deleteLargestBST`.

Solution:
L'algorithme est le suivant : si on a trouvé l'élément que l'on doit supprimer, on peut aller chercher l'élément maximum du sous-arbre gauche pour le mettre à la place. La seule petit difficulté est si le sous-arbre gauche est vide.

```
deleteBST :: (Ord a) => BTree a -> a -> BTree a
deleteBST Empty _ = Empty
deleteBST bst@(Branch Empty x r) y
  | x == y     = r
  | y > x      = Branch Empty x (deleteBST r y)
  | otherwise = bst
deleteBST (Branch l x r) y
  | x == y     = Branch l' x' r
  | y < x      = Branch (deleteBST l y) x r
  | otherwise = Branch l x (deleteBST r y)
  where
    Just (x', l') = deleteLargestBST l
```

(e) Écrire la fonction

```
deleteBST' :: (Ord a) => BTree a -> a -> Maybe (BTree a)
```

qui supprime - s'il existe - un élément dans un arbre binaire de recherche. La fonction retourne `Nothing` si l'élément recherché ne se trouve pas dans l'arbre binaire de recherche. Encore une fois, pensez à utiliser `deleteLargestBST`.

Solution:
Une première solution de filou ... mais pas très efficace!

```
instance (Eq a) => Eq (BTree a) where
  Empty          == Empty          = True
  Empty          == _              = False
  _              == Empty          = False
  Branch l x r == Branch l' x' r' = x == x' && l == l' && r == r'

deleteBST' :: (Ord a) => BTree a -> a -> Maybe (BTree a)
deleteBST' bst y = if bst' /= bst then Just bst' else Nothing
  where
    bst' = deleteBST bst y
```

Une solution préférable est la suivante.

```
deleteBST :: (Ord a) => BTree a -> a -> Maybe (BTree a)
deleteBST Empty _ = Just Empty
deleteBST (Branch Empty x r) y
  | x == y    = Just r
  | y > x     = case deleteBST r y of
    Nothing -> Nothing
    Just r' -> Just (Branch Empty x r')
  | otherwise = Nothing
deleteBST (Branch l x r) y
  | x == y    = Just (Branch l' x' r)
  | y < x     = case deleteBST l y of
    Nothing -> Nothing
    Just l' -> Just (Branch l' x r)
  | otherwise = case deleteBST r y of
    Nothing -> Nothing
    Just r' -> Just (Branch l x r')
  where
    Just (x', l') = deleteLargestBST l
```

Question 3: (*) Pour aller (un peu) plus loin

(a) Ecrire la fonction

```
mkBST :: [a] -> BTree a
```

qui construit un arbre binaire de recherche à partir d'une liste d'éléments.

Solution:
On reconnaît tout de suite (?!) un fold.

```
import qualified Data.Foldable as F
```

```
mkBST :: (Ord a) => [a] -> BTree a
mkBST = F.foldl insertBST emptyBT
```

ou encore

```
mkBST :: (Ord a) => [a] -> BTree a
mkBST = F.foldr (flip insertBST) emptyBT
```

(b) Ecrire la fonction

```
levelVisit :: BTree a -> [a]
```

qui retourne la liste des éléments d'un arbre binaire par niveau.

```
ghci> levelVisit exampleBT
[10,4,20,3,8,15,5]
```

Solution:
Pensons fonctionnelle. Il suffit d'indexer les éléments par leur profondeur et de trier ensuite par profondeur.

```
import qualified Data.List   as L
import qualified Data.Tuple  as T

levelVisit :: BTree a -> [a]
levelVisit = render . indexByDepth 0 []
  where
    indexByDepth _ acc Empty            = acc
    indexByDepth i acc (Branch l x r) = indexByDepth (i+1) acc'' l
      where
        acc'  = (i, x) : acc
        acc'' = indexByDepth (i+1) acc' r
    render = L.map T.snd . L.sortBy cmp
      where
        (i, _) `cmp` (j, _) = i `compare` j
```

Une autre solution.

```
import qualified Data.Foldable as F

zipWithPad :: [[a]] -> [[a]] -> [[a]]
zipWithPad []       []       = []
zipWithPad (x : xs) []       = x        : zipWithPad xs []
zipWithPad []       (y : ys) = y        : zipWithPad [] ys
zipWithPad (x : xs) (y : ys) = (x ++ y) : zipWithPad xs ys

levelVisit' :: BTree a -> [a]
levelVisit' = F.foldl (++) [] . aux
  where
    aux Empty          = []
    aux (Branch l x r) = [x] : zipWithPad (aux l) (aux r)
```