Déterminant

Vincent Nozick

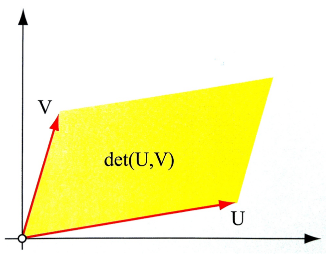
Déterminant

Introduction :
En pratique, le déterminant d'une matrice mesure une surface, un volume, ou un objet de dimension supérieure.

Sens originel :
Détermine l'unicité de la solution d'un système linéaire.

Déterminant et parallélogramme

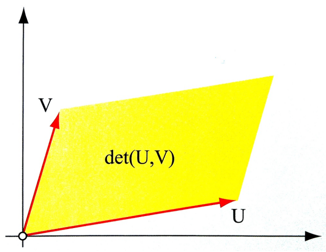
Soit le parallélogramme défini par $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$:



Le déterminant de la matrice $[\mathbf{u}|\mathbf{v}]$,noté $\det(\mathbf{u},\mathbf{v})$, est l'aire de ce parallélogramme, affecté du signe $-$ si le trajet de $\mathbf{u}$ à $\mathbf{v}$ se fait dans le sens des aiguilles d'une montre.

Déterminant

Propriété :

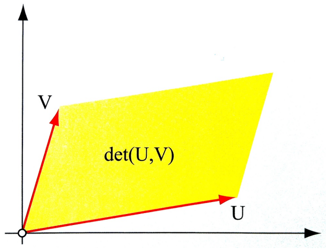


$$\det(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{u}) = 0 \quad \forall\lambda$$

l'aire d'un parallélogramme issu de 2 vecteurs colinéaires est nulle.

Déterminant

Propriété :

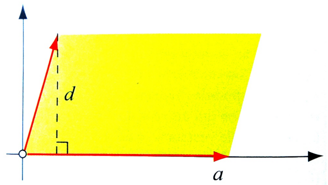


Alternance

$$\det(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\det(\mathbf{v},\mathbf{u})$$

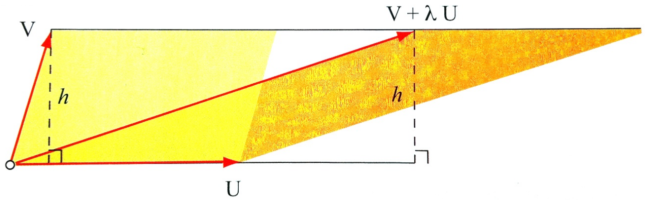
ne tourne pas dans le même sens pour passer de $\mathbf{u}$ à $\mathbf{v}$

Parallélogramme



L'aire d'un parallélogramme $=$ base $\times$ hauteur

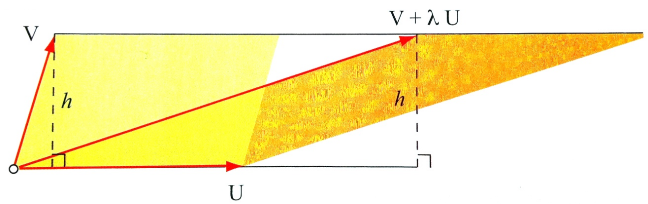
Parallélogramme



Les parallélogramme définis par $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ et $(\mathbf{u},\mathbf{v}+\lambda\mathbf{u})$ ont la même base et la même hauteur, donc la même surface .

Déterminant

Propriété :

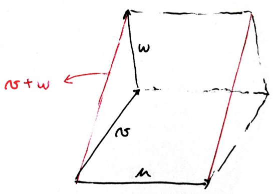


$$\det(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \det(\mathbf{u},\mathbf{v}+\lambda\mathbf{u}) \quad \forall\lambda$$

pour une matrice, l'ajout à une colonne d'une combinaison linéaire des autres colonnes ne changent pas son déterminant.

Déterminant

Propriété :

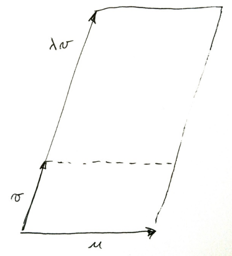


Additivité

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \det(\mathbf{u}, \mathbf{w})$$

Déterminant

Propriété :



$$\det(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{v}) = \lambda \det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

multiplier une colonne de la matrice par λ
multiplie aussi le déterminant par λ.

Déterminant

Propriété :

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \det(\mathbf{u}, \mathbf{w})$$

et

$$\det(\lambda\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda \det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

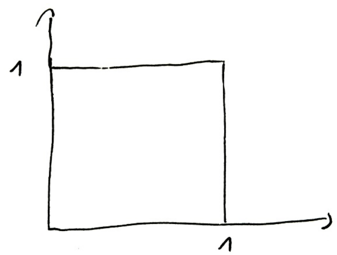
$$\Downarrow$$

Linéarité

$$\det(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) = \lambda \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mu \det(\mathbf{u}, \mathbf{w})$$

Déterminant

Propriété :



$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Déterminant 2×2

Soient $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ les vecteurs unitaires du référentiel, on a :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det(a\overrightarrow{i} + c\overrightarrow{j}, b\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j})$$

$$\begin{aligned} & \det(a\overrightarrow{i} + c\overrightarrow{j}, b\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}) \\ = & \det(a\overrightarrow{i} + c\overrightarrow{j}, b\overrightarrow{i}) + \det(a\overrightarrow{i} + c\overrightarrow{j}, d\overrightarrow{j}) \\ = & \det(a\overrightarrow{i}, b\overrightarrow{i}) + \det(c\overrightarrow{j}, b\overrightarrow{i}) + \det(a\overrightarrow{i}, d\overrightarrow{j}) + \det(c\overrightarrow{j}, d\overrightarrow{j}) \\ = & ab\det(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}) + cb\det(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}) + ad\det(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) + cd\det(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j}) \\ = & ad - bc \end{aligned}$$

déterminant 2×2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Système linéaire

Soit le système : $\left\{ \begin{array}{lcl} 4x - y & = & 1 \\ 2x + 3y & = & 5 \end{array} \right.$

On pose : $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Le système s'écrit alors : $\mathbf{u}x + \mathbf{v}y = \mathbf{b}$

Système linéaire

$$\mathbf{u}x + \mathbf{v}y = \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{b}, \mathbf{v}) &= \det(\mathbf{u}x + \mathbf{v}y, \mathbf{v}) \\ &= x\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + y\det(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &= x\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{v})}{\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})}$$

de même ...

$$\Rightarrow y = \frac{\det(\mathbf{u}, \mathbf{b})}{\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})}$$

Système linéaire

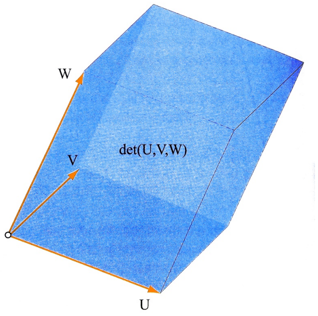
$$\left\{ \begin{array}{lcl} 4x - y & = & 1 \\ 2x + 3y & = & 5 \end{array} \right. \text{ et } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{v})}{\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})} \qquad y = \frac{\det(\mathbf{u}, \mathbf{b})}{\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{8}{14} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{18}{14}$$

Déterminant 3×3

Introduction :



Le déterminant $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ correpond au volume du parallélépipède issu des vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$.

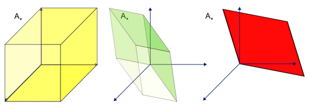
Déterminant 3×3

Propriétés :

- Si au moins deux vecteurs parmi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont colinéraires ou bien si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont coplanaire, alors $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$.
- Le signe du déterminant dépend de la "règle de la main gauche".

Déterminant 3×3

Avec les mains :
Le déterminant d'une application linéaire est un nombre qui représente un facteur multiplicatif pour les volumes.



- Cube jaune de volume 1 $\Rightarrow$ volume du cube vert $=$ valeur absolue du déterminant de l'application.
- La deuxième application a un déterminant nul $\Rightarrow$ aplatissement des volumes.

Le signe du déterminant est positif s'il est possible de déformer continûment le cube jaune pour obtenir le vert. Il est négatif s'il est nécessaire d'y appliquer en plus une symétrie.

Déterminant 3×3

Calcul :

$$\mathtt{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathtt{M}) = & \quad m_{11}.m_{22}.m_{33} - m_{11}.m_{32}.m_{23} \\ & - \; m_{21}.m_{12}.m_{33} + m_{21}.m_{32}.m_{13} \\ & + \; m_{31}.m_{12}.m_{23} - m_{31}.m_{22}.m_{13} \end{aligned}$$

Déterminant $n \times n$

$$\mathtt{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

Comatrice (matrice des cofacteurs)

$$\mathtt{Cof}_{i,j} = (-1)^{i.j} \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1,j-1} & m_{1,j+1} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{i-1,1} & \cdots & m_{i-1,j-1} & m_{i-1,j+1} & \vdots & m_{i-1,n} \\ m_{i+1,1} & \cdots & m_{i+1,j-1} & m_{i+1,j+1} & \vdots & m_{i+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{n,j-1} & m_{n,j+1} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

Calcul récursif : $\det(\mathtt{M}) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \det(\mathtt{Cof}_{i,j})$

Déterminant $n \times n$

Calcul récursif : exemple avec déterminant 3×3

$$\mathtt{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathtt{M}) = m_{11} \begin{vmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} - m_{21} \begin{vmatrix} m_{12} & m_{13} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} + m_{31} \begin{vmatrix} m_{12} & m_{13} \\ m_{22} & m_{23} \end{vmatrix}$$

Déterminant nD

Pour calculer le déterminant d'une matrice :

$\mathbf{3} \times \mathbf{3}$: 3 déterminants de matrices 2×2

$\mathbf{4} \times \mathbf{4}$: 4 déterminants de matrices 3×3

$\mathbf{5} \times \mathbf{5}$: 5 déterminants de matrices 4×4

$\mathbf{6} \times \mathbf{6}$: 6 déterminants de matrices 5×5
$\hookrightarrow$ 120 déterminants 3×3

Déterminant nD

Temps de calculs :

Le calcul de l'inverse d'une matrice d'ordre n par la méthode du déterminant est en $\mathcal{O}(n^2 n! + n^3)$.

n	temps de calcul (processeur 3GHz)
10	

Déterminant nD

Temps de calculs :

Le calcul de l'inverse d'une matrice d'ordre n par la méthode du déterminant est en $\mathcal{O}(n^2 n! + n^3)$.

n	temps de calcul (processeur 3GHz)
10	10^{-5} s
15	

Déterminant nD

Temps de calculs :

Le calcul de l'inverse d'une matrice d'ordre n par la méthode du déterminant est en $\mathcal{O}(n^2 n! + n^3)$.

n	temps de calcul (processeur 3GHz)
10	10^{-5} s
15	11 s
20	

Déterminant nD

Temps de calculs :

Le calcul de l'inverse d'une matrice d'ordre n par la méthode du déterminant est en $\mathcal{O}(n^2 n! + n^3)$.

n	temps de calcul (processeur 3GHz)
10	10^{-5} s
15	11 s
20	1 an
25	

Déterminant nD

Temps de calculs :

Le calcul de l'inverse d'une matrice d'ordre n par la méthode du déterminant est en $\mathcal{O}(n^2 n! + n^3)$.

n	temps de calcul (processeur 3GHz)
10	10^{-5} s
15	11 s
20	1 an
25	11 millions d'années (trop long)

Déterminant nD

Propriétés :

- $\det(A') = -\det(A)$ si $A' = A$ avec 1 permutation de ligne
- $\det(A') = -\det(A)$ si $A' = A$ avec 1 permutation de colonne
- $\det(A)$ invariant si $L_A(i) = L_A(i) + kL_A(j) \quad (i \neq j)$
- $\det(A') = k.\det(A)$ si $L'_A(i) = k.L_A(i)$
- $\det(A) = \det(A^\top)$
- $\det(A) = 0$ si A est singulière
- $\det(A) = \prod A_{ii}$ si A est triangulaire ou diagonale

Calcul numérique

Algorithm 1: déterminant

input: une matrice carrée A

Triangulariser A pivot de Gauss

- en faisant des permutations de lignes et de colonnes
- en ajoutant aux lignes une combinaison linéaire d'autres lignes

$\rightarrow$ noter pour chaque opération le changement de signe du déterminant

return $\pm \prod A_{ii}$

Cette méthode permet aussi de calculer le rang de A.

Calcul numérique

Applications :

- savoir si un système linéaire à une solution.
- vision par ordinateur : connaitre l'orientation d'une caméra à partir du signe du détermainant de sa matrice de projection.
- synthèse d'images : connaitre le facteur de changement de volume d'une transformation 3D.