# Matrices inverses

Vincent Nozick





## Matrice inverse

**Définition :**

Soit $\mathtt{M}$ une matrice, la matrice inverse $\mathtt{M}^{-1}$ de $\mathtt{M}$ est définie par :

$$\mathtt{M}\mathtt{M}^{-1} = \mathtt{M}^{-1}\mathtt{M} = \mathtt{Id}$$





## Matrice inverse

**Propriétés :**

L'inverse d'une matrice n'existe pas toujours.

- si $\mathtt{M}$ est inversible, on dit que $\mathtt{M}$ est **régulière**
- sinon, $\mathtt{M}$ est **singulière**.





## Matrice inverse

**Propriétés :**

Soit $\mathtt{M}$ une matrice carrée d'ordre $n$.
Les énoncés suivants sont équivalents :

- $\mathtt{M}$ est inversible
- $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est la seule solution de $\mathtt{M}\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- $\mathtt{M}$ est de rang $n$
- aucune ligne (colonne) de $\mathtt{M}$ n'est combinaison linéaire d'autres lignes (colonne) de $\mathtt{M}$
- pour tout vecteur $\mathbf{k}$, $\mathtt{M}\mathbf{x} = \mathbf{k}$ admet une solution
- $\det \mathtt{M} \neq 0$

# Matrice inverse

**Propriétés :**

- $\texttt{Id}^{-1} = \texttt{Id}$
- $(\texttt{AB})^{-1} = \texttt{B}^{-1}\texttt{A}^{-1}$
- $(\texttt{M}^{-1})^{-1} = \texttt{M}$
- $\left[\text{diag}(m_{ii})\right]^{-1} = \left[\text{diag}\left(\frac{1}{m_{ii}}\right)\right]$





# Matrice inverse

**Applications :**

- résoudre des systèmes linéaires
- trouver des transformations inverses





# Matrice inverse

**Inverse et systèmes linéaires :**

Résoudre le système : $\texttt{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\texttt{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\texttt{A}^{-1}\texttt{A}\mathbf{x} = \texttt{A}^{-1}\mathbf{b}$$
$$\texttt{Id}\mathbf{x} = \texttt{A}^{-1}\mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} = \texttt{A}^{-1}\mathbf{b}$$

**Note :**
Pour résoudre un système linéaire, préférez les méthodes sans inversion de matrice.





# Inversion

**Methode de Cramer :** (méthode habituelle)

$$\texttt{M}^{-1} = \frac{1}{\det \texttt{M}} com(\texttt{M})^\top$$

avec :
- $\det \texttt{M}$ : le déterminant de $\texttt{M}$
- $com(\texttt{M})^\top$ : transposée de la matrice des cofacteurs (comatrice)

# Inversion

$$\mathtt{M}^{-1} = \frac{1}{\det \mathtt{M}} com(\mathtt{M})^\top$$

le calcul du déterminant est long! (cf. déterminant)





# Inversion

**Methodes numériques :**

- pivot de Gauss
- Gauss-Jordan
- décompositions matricielles





# Pivot de Gauss

**Méthode :**

$$\mathtt{M}\mathtt{M}^{-1} = \mathtt{Id}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{23} & n_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ il suffit de résoudre $n$ systèmes.





# Pivot de Gauss

**Méthode :**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{23} & n_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La triangulation de la $\mathtt{M}$ est commune à tous les systèmes, avec des effets sur $\mathtt{N}$ et $\mathtt{Id}$.

# Pivot de Gauss

**Triangulation :**

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{23} & n_{33} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ex : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m'_{22} & m'_{23} \\ m_{31} & m'_{23} & m'_{33} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{23} & n_{33} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r|c|c} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$





# Pivot de Gauss

**Elimination :**

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c} n'_{11} & n'_{12} & n'_{13} \\ n'_{21} & n'_{22} & n'_{23} \\ n'_{31} & n'_{23} & n'_{33} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{array}\right]$$

$\hookrightarrow$ on résoud :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n'_{11} \\ n'_{21} \\ n'_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{pmatrix}$$

et on fait pareil pour les 2 autres colonnes de $\mathtt{N}'$





# Pivot de Gauss

**Méthode :**

- triangulation de $\mathtt{M}$ avec des effets sur $\mathtt{N}$ et $\mathtt{Id}$
- éliminations indépendantes sur chaque colonne de $\mathtt{N}$.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n'_{11} \\ n'_{21} \\ n'_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n'_{12} \\ n'_{22} \\ n'_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n'_{13} \\ n'_{23} \\ n'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{pmatrix}$$





# Gauss-Jordan

**Principe :**

- données de départ : $\mathtt{A}$
- à la manière de la triangulation du pivot de Gauss :
  - on rend la matrice $\mathtt{A}$ triangulaire grâce à une matrice $\mathtt{M}_1$.
  - on rend cette matrice diagonale grâce à une matrice $\mathtt{M}_2$.
  - on tranforme cette matrice en matrice identité avec $\mathtt{M}_3$.

  $\hookrightarrow$ $\mathtt{M}_3\mathtt{M}_2\mathtt{M}_1\mathtt{A} = \mathtt{MA} = \mathtt{Id}$

**En pratique :**

on applique les transformations succèssives sur $\mathtt{A}$ $(\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{Id})$ et sur $\mathtt{Id}$ pour se souvenir des transformation successives et trouver $\mathtt{M}$ :

$$[\mathtt{A}|\mathtt{Id}] \rightarrow [\mathtt{MA}|\mathtt{M}] = [\mathtt{Id}|\mathtt{M}] \;\Rightarrow\; \mathtt{M} = \mathtt{A}^{-1}$$

# Concrètement

**Au départ :**

$$[\mathtt{A}|\mathtt{Id}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$





# Concrètement

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

avec uniquement des opérations sur les lignes

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & u_{21} & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} & u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{array}\right]$$





# Concrètement

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & u_{21} & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} & u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{array}\right]$$

avec uniquement des opérations sur les lignes

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & 0 & 0 & u'_{11} & u'_{12} & u'_{13} \\ 0 & a'_{22} & 0 & u'_{21} & u'_{22} & u'_{23} \\ 0 & 0 & a'_{33} & u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{array}\right]$$





# Concrètement

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & 0 & 0 & u'_{11} & u'_{12} & u'_{13} \\ 0 & a'_{22} & 0 & u'_{21} & u'_{22} & u'_{23} \\ 0 & 0 & a'_{33} & u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{array}\right]$$

avec uniquement des opérations sur les lignes

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & u''_{11} & u''_{12} & u''_{13} \\ 0 & 1 & 0 & u''_{21} & u''_{22} & u''_{23} \\ 0 & 0 & 1 & u''_{31} & u''_{32} & u''_{33} \end{array}\right]$$

Au final : $[\mathtt{A}|\mathtt{Id}] \rightarrow [\mathtt{Id}|\mathtt{U}]$ avec $\mathtt{U} = \mathtt{A}^{-1}$.

# Gauss-Jordan

**Remarques :**

- utilise moins de mémoire que le pivot de Gauss.
- un peu moins de calculs.
- ne bénéficie pas du pivot total.





# Inverse par décomposition

Il est possible d'inverser une matrice via des décompositions :

- on décompose une matrice $\mathtt{A}$ comme le produit de plusiseurs matrices ayant des propriétés spéciales.

$$\mathtt{A} = \mathtt{M}_1\mathtt{M}_2 \cdots \mathtt{M}_k$$

- on inverse ces matrices spéciales facile à inverser :
  - matrices orthogonales
  - matrice diagonales
  - matrices triangulaires
  - ...
- on compose la matrice inverse $\mathtt{A}^{-1}$ via les inverses des matrices spéciales.

$$\mathtt{A}^{-1} = \mathtt{M}_k^{-1} \cdots \mathtt{M}_2^{-1}\mathtt{M}_1^{-1}$$





# Inverse par décomposition

**Décompositions :**

- LU
- QR et RQ
- SVD
- Vecteurs propres et valeurs propres
- Cholesky
- $\cdots$





# Inverse rapide

**Matrice $2 \times 2$ :**

$$\mathtt{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \mathtt{M}^{-1} = \frac{1}{\det \mathtt{M}} com(\mathtt{M})^\top$$

$$\mathtt{M}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

# Inverse rapide

**Matrice $3 \times 3$ :**

$$\mathtt{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \mathtt{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathtt{A}} com(\mathtt{A})^\top$$

---

$$\det(\mathtt{A}) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

$$com(\mathtt{A})^\top = \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} & a_{13}a_{32} - a_{33}a_{12} & a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \\ a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21} & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} & a_{13}a_{21} - a_{23}a_{11} \\ a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} & a_{12}a_{31} - a_{32}a_{11} & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{bmatrix}$$





# Inverse rapide

**Matrice $4 \times 4$ Affine :** (en synthèse d'images)

$$\mathtt{M} = \begin{bmatrix} \mathtt{A}_{3\times 3} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathtt{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathtt{A}^{-1} & -\mathtt{A}^{-1}\mathbf{u} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix}$$

calcul de $\mathtt{A}^{-1}$ avec inversion $3 \times 3$.