Vecteurs propres, valeurs propres

Vincent Nozick

Vecteurs propres et valeurs propres

Introduction :
Les **vecteurs propres** d'une application linéaire correspondent aux axes privilégiés selon lesquels l'application se comporte comme une dilatation, multipliant les vecteurs par une même constante. Ce rapport de dilatation est appelé **valeur propre**.

Vecteurs propres et valeurs propres

Définition :
λ est une valeur propre de $\mathtt{A}_{nn}$ si et seulement si il existe un vecteur $\mathbf{x}$ non nul tel que :

$$\mathtt{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

On dit alors que $\mathbf{x}$ est le vecteur propre de $\mathtt{A}$ associé à la valeur propre λ.

Vecteurs propres et valeurs propres

En plus clair :
En considérant une matrice comme une matrice de transformation, ses vecteurs propres sont des vecteurs dont la direction n'est pas affectée par cette transformation.

Exemple

$$\text{Soit } \mathtt{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

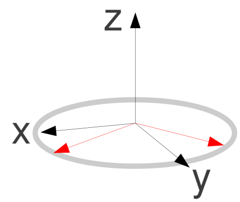
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $\mathtt{A}$ de valeur propre $\lambda = 2$.

Avec les mains

Rotation dans $\mathbb{R}^3$ autour de l'axe des z :

$$\mathtt{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



cette rotation appliquée sur l'axe des z donnera ... l'axe des z.

Avec les mains

Rotation dans $\mathbb{R}^3$ autour de l'axe des z :

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

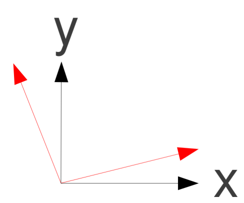
L'axe des z est donc un vecteur propre de $\mathtt{A}$ dont la valeur propre $\lambda = 1$.

Avec les mains

Rotation dans $\mathbb{R}^2$ (dans le plan) :

$$\mathtt{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\alpha \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$



Aucun axe n'est invariant par cette transformation $\rightarrow$ pas de valeur propre réelle.

Exemple avec les mains

L'application de $\mathbb{R}^2$ qui transforme le point (x, y) en point $(x, x+y)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \end{pmatrix}$$

L'axe des y est un vecteur propre de cette application associé à la valeur propre $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple avec les mains

L'application de $\mathbb{R}^2$ qui transforme le point (x, y) en point $(x, x+y)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \end{pmatrix}$$

L'axe des y est un vecteur propre de cette application associé à la valeur propre $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En fait, n'importe quel vecteur $\big(0, k\big)^\top$, $k \neq 0$, est un vecteur propre de cette application associé à la valeur propre $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$$

Calcul

Méthodes classiques :

$$\mathtt{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathtt{A} - \lambda\mathtt{Id})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \det(\mathtt{A} - \lambda\mathtt{Id}) = 0$$

- s'il existe $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tel que $\mathtt{M}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, alors $\mathtt{M}$ est singulière et $\det \mathtt{M} = 0$.
- en développant le déterminant, on obtient le polynôme caractéristique de $\mathtt{A}$ dont les racines sont ses valeurs propres.

Exemple

$$\mathtt{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathtt{A} - \lambda\mathtt{Id} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathtt{A} - \lambda\mathtt{Id}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2-\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\big((2-\lambda^2)-2\big) + 2(1-\lambda) = 4 - 8\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3$$

Exemple

$$\det(\mathtt{A} - \lambda\mathtt{Id}) = 4 - 8\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3$$

Les trois racines de ce polynôme sont :

- $\lambda = 1$
- $\lambda = 2$ (racine double)

Exemple

Pour $\lambda = 1$:

$$\mathtt{Ax} - \lambda\mathtt{Idx} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solution :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

Vérification pour $\lambda = 1$:

solution : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

Pour $\lambda = 2$:

$$\mathtt{Ax} - \lambda\mathtt{Idx} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solution :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

Vérification pour $\lambda = 2$:

solution : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vecteurs propres et valeurs propres

Diagonalisation :
Le problème revient à trouver une matrice diagonale $\mathtt{D}$:

$$\mathtt{D} = [\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)]$$

et une matrice régulière $\mathtt{P}$ telles que :

$$\mathtt{A} = \mathtt{PDP}^{-1}$$

Les λ_i sont les valeurs propres de $\mathtt{A}$ et les colonnes de $\mathtt{P}$ les vecteurs propres associés.

Exemple

$$\mathtt{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

racine double

Exemple

Diagonalisation :
$\mathtt{A}$ a une valeur propre de multiplicité 2 dont les vecteurs propres associés ne sont pas indépendants.

Dans

$$\mathtt{A} = \mathtt{PDP}^{-1}$$

$\mathtt{P}$ n'est pas inversible car 2 vecteurs propres sont identiques.

Remarque :
Les vecteurs propres associés à une valeur propre de multiplicité > 1 sont parfois indépendants $\rightarrow$ diagonalisation OK.

Diagonalisation : Exemple

Vecteurs propres et valeurs propres :

$$\mathtt{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3 \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 1 \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Diagonalisation : Exemple

On veut $\mathtt{A} = \mathtt{PDP}^{-1}$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

λ = 3
λ = 2
λ = 1

v_1 v_2 v_3

Diagonalisation : Exemple

On veut $\mathtt{A} = \mathtt{PDP}^{-1}$

$$\mathtt{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathtt{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathtt{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathtt{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Méthodes numériques

Méthodes numériques :

- décomposition LU
- décomposition QR (plus robuste)
- ...

Décomposition LU

$$\mathtt{M} = \mathtt{LU}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Calcul des valeurs propres

Décomposition LU : une méthode récursive

Algorithm 1: Calcul des valeurs propres

input: une matrice $\mathtt{M}_{n\times n}$ dont on cherche les valeurs propres
$\mathtt{A} = \mathtt{M}$
repeat
  $\mathtt{L}, \mathtt{U} = LU(\mathtt{A})$
  $\mathtt{A} = \mathtt{U} \times \mathtt{L}$
until convergence

return diag($\mathtt{A}$)

La matrice $\mathtt{A}$ converge vers une matrice triangulaire supérieure semblable à $\mathtt{M}$ dont la diagonale est alors constituée des valeurs propres de $\mathtt{M}$.

Vecteurs propres & valeurs propres

Applications

- en mécanique quantique
  matrices Hamiltoniennes
- en mécanique du solide
  fréquences de résonance d'un oscillateur harmonique
- en géologie
  étude des tremblements de terre
- en électronique
- en statistique
- en économie
- ...