

## Les polynômes

Vincent Nozick



## Évaluation d'un polynôme

**Méthode naïve :**

$$P(x_0) = \sum_{i=0}^n a_i x_0^i$$

calculer à chaque fois  $x_0^i$  comporte une grosse redondance.

## Évaluation d'un polynôme

**Introduction :**

Soit un polynôme  $P(x)$ , on veut évaluer ce polynôme en  $x = x_0$ .

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

## Schéma de Horner

Pour accélérer les calculs, on peut récrire  $P(x)$  :

$$P(x) = \left( \left( \dots \left( (a_n x + a_{n-1}) x + a_{n-2} \right) x + \dots \right) x + a_1 \right) x + a_0$$

Comment procède-t-on? (on commence par où?)

## Schéma de Horner

$$P(x_0) = \left( ((a_4x + a_3)x + a_2)x + a_1 \right)x + a_0$$

$$b_4 = a_4$$

## Schéma de Horner

$$P(x_0) = \left( ((a_4x + a_3)x + a_2)x + a_1 \right)x + a_0$$

$$b_4 = a_4$$

$$b_3 = a_4x_0 + a_3$$

$$b_3 = b_4x_0 + a_3$$

## Schéma de Horner

$$P(x_0) = \left( ((a_4x + a_3)x + a_2)x + a_1 \right)x + a_0$$

$$b_4 = a_4$$

$$b_3 = a_4x_0 + a_3$$

$$b_2 = (a_4x_0 + a_3)x_0 + a_2$$

$$b_3 = b_4x_0 + a_3$$

$$b_2 = b_3x_0 + a_2$$

## Schéma de Horner

$$P(x_0) = \left( ((a_4x + a_3)x + a_2)x + a_1 \right)x + a_0$$

$$b_4 = a_4$$

$$b_3 = a_4x_0 + a_3$$

$$b_2 = (a_4x_0 + a_3)x_0 + a_2$$

$$b_1 = ((a_4x_0 + a_3)x_0 + a_2)x_0 + a_1$$

$$b_3 = b_4x_0 + a_3$$

$$b_2 = b_3x_0 + a_2$$

$$b_1 = b_2x_0 + a_1$$



## Schéma de Horner : en pratique

## Force brute :

avec une légère optimisation : on précalcule  $x^2$ .

```
double sin1(double x)
{
    double result;
    double x2 = x * x;
    result = a0 * x; x *= x2;
    result += a1 * x; x *= x2;
    result += a2 * x; x *= x2;
    result += a3 * x; x *= x2;
    result += a4 * x; x *= x2;
    result += a5 * x; x *= x2;
    result += a6 * x; x *= x2;
    result += a7 * x;
    return result;
}
```

→ 16 multiplications et 7 additions.

## Schéma de Horner : en pratique

## Schéma de Horner :

avec la même légère optimisation : on précalcule  $x^2$ .

```
double sin2(double x)
{
    double x2 = x * x;
    return x*(a0+x2*(a1+x2*(a2+x2*(a3+x2*(a4+x2*(a5+x2*(a6+x2*a7))))));
}
```

→ 9 multiplications et 7 additions.

## Schéma de Horner : en pratique

compilation	<i>sin1</i>	<i>sin2</i>
normale	0.044 ns	0.031 ns
-O2	0.021 ns	0.024 ns

→ Horner est parfois plus lent !!

## Explications :

Certain pipeline cpu peuvent effectuer une opération et lire la variable de l'opération suivante en un seul cycle, sauf si la variable suivante dépend du résultat de l'opération courante. Dans ce cas, on perd à chaque fois un cycle.

→ *sin1* : 30 cycles

→ *sin2* : 48 cycles

## Schéma de Horner et dérivées

## Problématique :

Le schéma de Horner permet aussi d'évaluer la dérivée  $n$ -eme du polynôme  $P(x)$  en  $x_0$

## Schéma de Horner et dérivées

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P(x) = ((a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

$$\begin{array}{ll} b_3 = a_3 & a_3 = b_3 \\ b_2 = b_3x_0 + a_2 & a_2 = b_2 - b_3x_0 \\ b_1 = b_2x_0 + a_1 & \Leftrightarrow a_1 = b_1 - b_2x_0 \\ b_0 = b_1x_0 + a_0 & a_0 = b_0 - b_1x_0 \\ P(x_0) = b_0 & a_0 = P(x_0) - b_1x_0 \end{array}$$

On réécrit l'équation de départ en remplaçant les  $a_i$  :

$$P(x) = b_3x^3 + (b_2 - b_3x_0)x^2 + (b_1 - b_2x_0)x + P(x_0) - b_1x_0$$

## Schéma de Horner et dérivées

Développement et factorisation :

$$P(x) = b_3x^3 + (b_2 - b_3x_0)x^2 + (b_1 - b_2x_0)x + P(x_0) - b_1x_0$$

$$P(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x - (b_3x^2 + b_2x + b_1)x_0 + P(x_0)$$

$$P(x) = (b_3x^2 + b_2x + b_1)x - (b_3x^2 + b_2x + b_1)x_0 + P(x_0)$$

$$P(x) = (b_3x^2 + b_2x + b_1)(x - x_0) + P(x_0)$$

## Schéma de Horner et dérivées

On obtient une nouvelle écriture du polynôme :

$$P(x) = \left( \underbrace{b_3x^2 + b_2x + b_1}_Q \right) (x - x_0) + P(x_0)$$

on recommence sur le polynôme  $Q(x) = b_3x^2 + b_2x + b_1$

on obtient :

$$P(x) = ((c_2x + c_1)(x - x_0) + Q(x_0))(x - x_0) + P(x_0)$$

## Schéma de Horner et dérivées

On obtient une nouvelle écriture du polynôme :

$$P(x) = \left( \left( \underbrace{c_2x + c_1}_M \right) (x - x_0) + Q(x_0) \right) (x - x_0) + P(x_0)$$

on recommence sur le polynôme  $M(x) = c_2x + c_1$

on obtient :

$$P(x) = ((d_1(x - x_0) + M(x_0))(x - x_0) + Q(x_0))(x - x_0) + P(x_0)$$

## Schéma de Horner et dérivées

Finalement :

$$P(x) = ((d_1(x - x_0) + M(x_0))(x - x_0) + Q(x_0))(x - x_0) + P(x_0)$$

développement :

$$P(x) = d_1(x - x_0)^3 + M(x_0)(x - x_0)^2 + Q(x_0)(x - x_0) + P(x_0)$$

soit dans l'autre sens :

$$P(x) = P(x_0) + Q(x_0)(x - x_0) + M(x_0)(x - x_0)^2 + d_1(x - x_0)^3$$

## Schéma de Horner et dérivées

$$P(x) = P(x_0) + Q(x_0)(x - x_0) + M(x_0)(x - x_0)^2 + d_1(x - x_0)^3$$

ressemble au développement de Taylor de  $f$  en  $x_0$  :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

## Schéma de Horner et dérivées

$$P(x) = P(x_0) + Q(x_0)(x - x_0) + M(x_0)(x - x_0)^2 + d_1(x - x_0)^3 + 0$$

ressemble au développement de Taylor de  $f$  en  $x_0$  :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

par identification :

$$\begin{aligned} P'(x_0) &= Q(x_0) & P'''(x_0) &= d_1 3! \\ P''(x_0) &= M(x_0) 2! & \dots &= 0 \end{aligned}$$

## Schéma de Horner et dérivées

Pour évaluer  $P(x_0)$ ,  $P'(x_0)$ ,  $P''(x_0)$ ,  $P'''(x_0)$ , ... il suffit d'appliquer le schéma de Horner plusieurs fois.

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{aligned} P(x_0) \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{aligned}$$

## Schéma de Horner et dérivées

Pour évaluer  $P(x_0)$ ,  $P'(x_0)$ ,  $P''(x_0)$ ,  $P'''(x_0)$ , ... il suffit d'appliquer le schéma de Horner plusieurs fois.

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$P(x_0)$	$Q(x_0)$
$a_3$	$b_3$
$a_2$	$b_2$
$a_1$	$b_1$
$a_0$	$b_0$

$$\rightarrow P(x) = (b_3x^2 + b_2x + b_1)(x - x_0) + P(x_0)$$

## Schéma de Horner et dérivées

Pour évaluer  $P(x_0)$ ,  $P'(x_0)$ ,  $P''(x_0)$ ,  $P'''(x_0)$ , ... il suffit d'appliquer le schéma de Horner plusieurs fois.

$$P(x) = (b_3x^2 + b_2x + b_1)(x - x_0) + P(x_0)$$

$P(x_0)$	$Q(x_0)$	$M(x_0)$
$a_3$	$b_3$	$c_2$
$a_2$	$b_2$	$c_1$
$a_1$	$b_1$	$c_0$
$a_0$	$b_0$	

$$\rightarrow P(x) = ((c_2x + c_1)(x - x_0) + Q(x_0))(x - x_0) + P(x_0)$$

## Schéma de Horner et dérivées

Pour évaluer  $P(x_0)$ ,  $P'(x_0)$ ,  $P''(x_0)$ ,  $P'''(x_0)$ , ... il suffit d'appliquer le schéma de Horner plusieurs fois.

$$P(x) = ((c_2x + c_1)(x - x_0) + Q(x_0))(x - x_0) + P(x_0)$$

$P(x_0)$	$Q(x_0)$	$M(x_0)$	
$a_3$	$b_3$	$c_2$	$d_1$
$a_2$	$b_2$	$c_1$	$d_0$
$a_1$	$b_1$	$c_0$	
$a_0$	$b_0$		

$$\rightarrow P(x) = ((d_1(x - x_0) + M(x_0))(x - x_0) + Q(x_0))(x - x_0) + P(x_0)$$

## Schéma de Horner et dérivées

Pour évaluer  $P(x_0)$ ,  $P'(x_0)$ ,  $P''(x_0)$ ,  $P'''(x_0)$ , ... il suffit d'appliquer le schéma de Horner plusieurs fois.

$$P(x) = ((d_1(x - x_0) + M(x_0))(x - x_0) + Q(x_0))(x - x_0) + P(x_0)$$

$P(x_0)$	$Q(x_0)$	$M(x_0)$	
$a_3$	$b_3$	$c_2$	$d_1$
$a_2$	$b_2$	$c_1$	$d_0$
$a_1$	$b_1$	$c_0$	
$a_0$	$b_0$		

## Schéma de Horner et dérivées

$$\begin{array}{r|l|l|l}
 P(x_0) & Q(x_0) & M(x_0) & \\
 \hline
 a_3 & b_3 & c_2 & d_1 \\
 a_2 & b_2 & c_1 & d_0 \\
 a_1 & b_1 & c_0 & \\
 a_0 & b_0 & & 
 \end{array}$$

$$P(x_0) = b_0 \qquad P''(x_0) = d_0 2!$$

$$P'(x_0) = c_0 \qquad P'''(x_0) = d_1 3!$$

## Évaluation de polynômes en parallèle

**Exemple :**  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$

$$\begin{array}{r|l|l|l|l|l|l}
 a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 & \dots \\
 \hline
 a_0 + a_1x & & a_2 + a_3x & & a_4 + a_5x & & 0 + 0x & & \dots \\
 \hline
 a_0 + a_1x + (a_2 + a_3x)x^2 & & & & a_4 + a_5x + (0 + 0)x^2 & & & & \dots \\
 \hline
 a_0 + a_1x + (a_2 + a_3x)x^2 + (a_4 + a_5x + (0 + 0)x^2)x^4 & & & & & & & & \dots
 \end{array}$$

## Évaluation de polynômes en parallèle

**Complexité :**  $O(\log_2 n)$

**Propriété :** meilleurs précision numérique.

## Racines de polynômes

**Rappels :**

- Racines du polynôme  $P(x)$  :  $\{x/P(x) = 0\}$
- Racines : réelles / complexes

## Racines de polynômes

### Degré 2 :

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## Racines de polynômes

### Degré 4 :

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

#### Méthode de Ferrari

- racines réelles ou complexes
- assez long à mettre en place

## Racines de polynômes

### Degré 3 :

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

#### Méthode de Cardan

- racines réelles ou complexes
- un peu long à mettre en place

## Racines de polynômes de degré $n$

### $n$ racines réelles :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

#### Méthode QR :

- écrire la matrice compagnon  $C$  de  $P$
- trouver les valeurs propres de  $C$  (décomp. RQ)
- optimisation non-linéaire (Newton)

Racines de polynômes de degré  $n$ 

Remarque :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

a les mêmes racines que

$$Q(x) = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \dots + \frac{a_2}{a_n} x^2 + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n}$$

(Polynôme unitaire)

Racines de polynômes de degré  $n$ 

Matrice compagnon :

$$Q(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Racines de polynômes de degré  $n$ Trouver les valeurs propres de  $C$   
méthode récursive**Algorithm 2:** Racines du polynôme par matrice compagnon**for**  $i \leftarrow 1$  **to**  $k$  **do**|  $C \rightarrow RQ$ |  $C = QR$ **end****return**  $\text{diag}(C)$ 

R : matrice triangulaire

Q : matrice de rotation

fonctionne aussi avec la décomposition LU

Racines de polynômes de degré  $n$ En cas de racines multiples,  
la convergence est moins bonne  
(répulsion des racines multiples)

recherche de zéros avec la méthode de Newton

# Racines de polynômes de degré $n$

## Résumé :

- écrire la matrice compagnon  $C$  de  $P$
- trouver les valeurs propres de  $C$  (décomp. RQ)
- optimisation non-linéaire (Newton)