

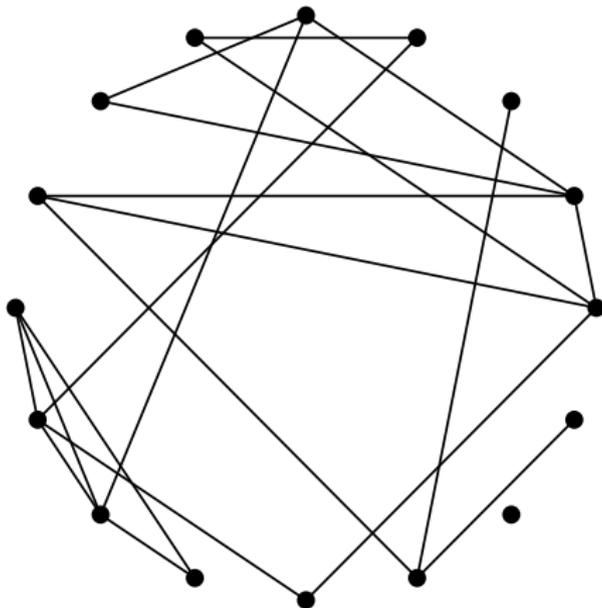
Enumeration des multigraphes cubiques sur les surfaces orientables

Wenjie Fang, LIP, ENS de Lyon
Travaux joints avec Mihyun Kang, Michael Moßhammer, Philipp Sprüssel

5 mars 2017, Université de Caen

Graphes aléatoires

Modèle Erdős–Rényi $G(n, M)$: n sommet, M arêtes prises au hasard



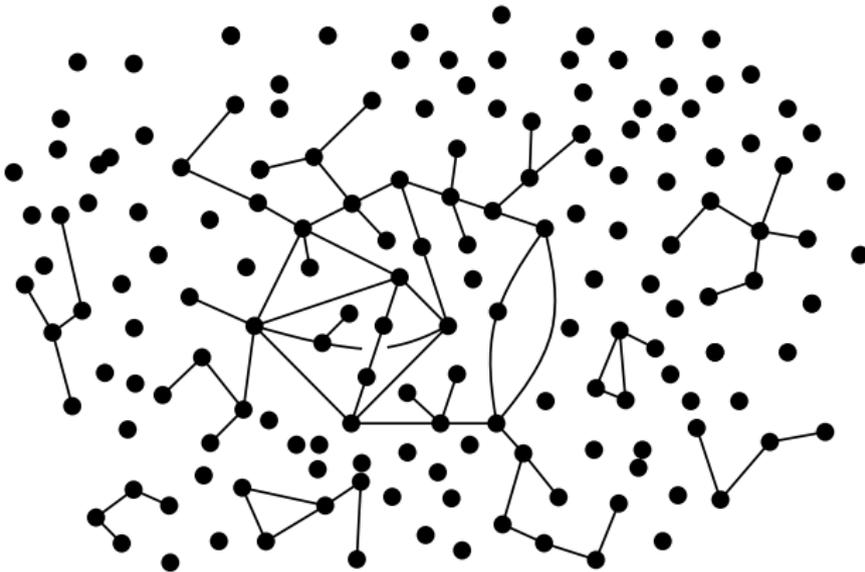
Beaucoup d'étude sur les transitions de phase

Émergence de la composante géante

Composante géante : composante contenant un fraction de sommet

Transition de phase :

$M = n/2$ avec une fenêtre $O(n^{2/3})$ (Erdős–Rényi 1960)



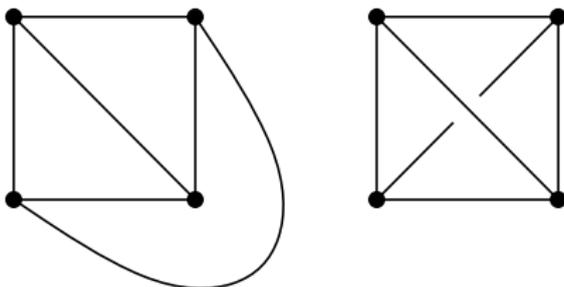
Aussi autres transitions de phase et étude sur la structure fine

Sur une surface ...

\mathbb{S}_g : surface de genre g (ayant g "trous")

Un graphe **connexe** G est **plongeable** dans \mathbb{S}_g si on peut le dessiner sur \mathbb{S}_g . Un plongement de G est **fort** si tous les faces sont polygonales.

Un graphe peut être **fortement plongeable** (réalisant une carte) dans des surfaces différentes.



Les graphes non connexes sont traités comme l'union de ses composantes.

Question : Quel est le comportement des graphes aléatoires **plongeables** dans \mathbb{S}_g ?

Graphes planaires

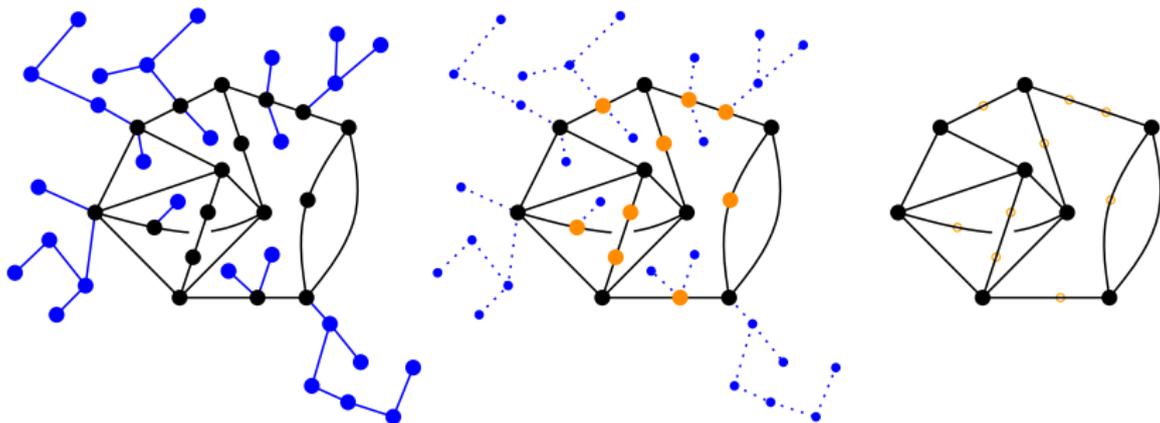
- $G(n, \mu n)$ est a.a.s. planaire pour $\mu < 1/2$ (Erdős et Rényi, 1960), et est a.a.s. non planaire pour $\mu > 1/2$ (Janson, Knuth, Luczak et Pittel 1993), avec une fenêtre $O(n^{2/3})$.
- Giménez et Noy (2009) : Énumération des graphes planaires avec n sommets étiquetés
 - Asymptotique : $\sim c \cdot n^{-7/2} \gamma^n n!$;
 - Lois du nombre d'arêtes ;
 - Asymptotique des graphes ayant μn arêtes pour $1 < \mu < 3$.
- Kang et Luczak : Modèle de graphe aléatoire planaire $P(n, M)$
 - Émergence de composante géante : toujours à $M = n/2 + O(n^{2/3})$;
 - Changement de croissance : $M = n + O(n^{3/5})$.

Graphes dans les surfaces

- Chapuy, Fusy, Giménez, Mohar et Noy (2011) et Bender et Gao (2011) : Énumération des graphes avec n sommets étiquetés **plongeables** dans \mathbb{S}_g
 - Asymptotique : $\sim c^{(g)} \cdot n^{5(g-1)/2-1} \gamma^n n!$;
 - Le même taux de croissance que le cas planaire ;
 - Lois du nombre d'arêtes ;
 - Asymptotique des graphes ayant μn arêtes pour $1 < \mu < 3$.

Notre but ultime : Analyser le graphe aléatoire plongeable dans \mathbb{S}_g

Le core et le kernel d'un graphe



Théorème (Łuczak–Pittel–Wierman 1994)

Pour $M = n/2 + O(n^{2/3})$, le kernel du graphe aléatoire $G(n, M)$ est asymptotiquement presque sûrement un graphe cubique.

Notre but courant : Énumérer les multigraphes **cubiques** plongeable dans $\mathbb{S}_g \dots$

... avec un certain poids qui nous arrange.

Nos résultats

Poids : $1/2$ sur chaque boucle et arête double

Théorème (W.F., Kang, Moßhammer, Sprüssel 2017+)

Pour $g \geq 0$, la somme pondérée $w_g(n)$ des multigraphes cubiques à n sommets avec étiquetage plongeable dans \mathbb{S}_g s'écrit

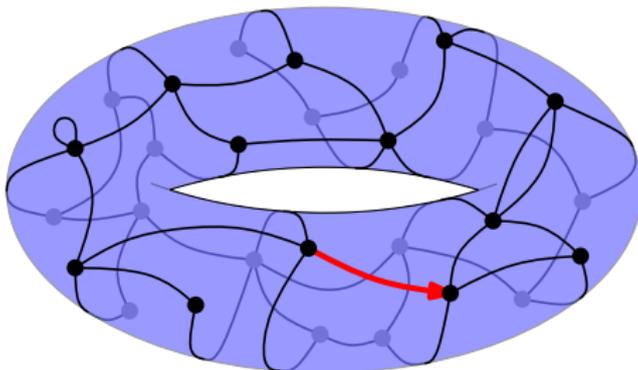
$$w_g(n) = \left(1 + O(n^{1/4})\right) e_g n^{5/2(g-1)-1} \gamma_w^{2n} (2n)!.$$

Ici, $\gamma_w = 79^{3/4} 54^{-1/2} \approx 3.606$, et e_g ne dépend que de g .

Nous avons aussi la version sans poids et la version simple.

Cartes

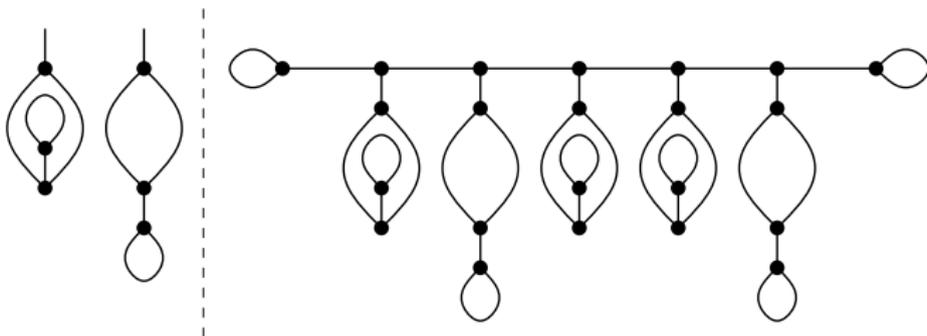
Une **carte** est un plongement fort d'un graphe, à petite variation près. On **enracine** les cartes en marquant une arête (**racine**) avec un orientation.



L'énumération des cartes est beaucoup plus avancée.

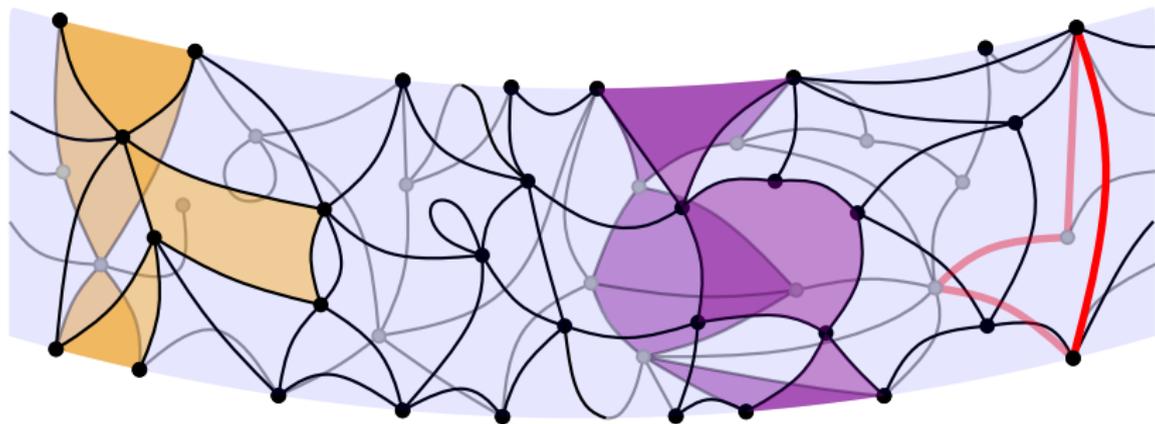
Idée : utiliser les cartes à énumérer les graphes ?

Une première approche ...



Pas de plongement unique en général !

Les largeurs diverses



Pour une carte M ,

- Edgewidth $ew(M)$: longueur minimum cycle non contractible ;
- Facewidth $fw(M)$: nombre minimum de sous-ensemble de faces contenant un cycle non contractible.

M planaire $\Leftrightarrow ew(M) = fw(M) = \infty$.

Plongement unique

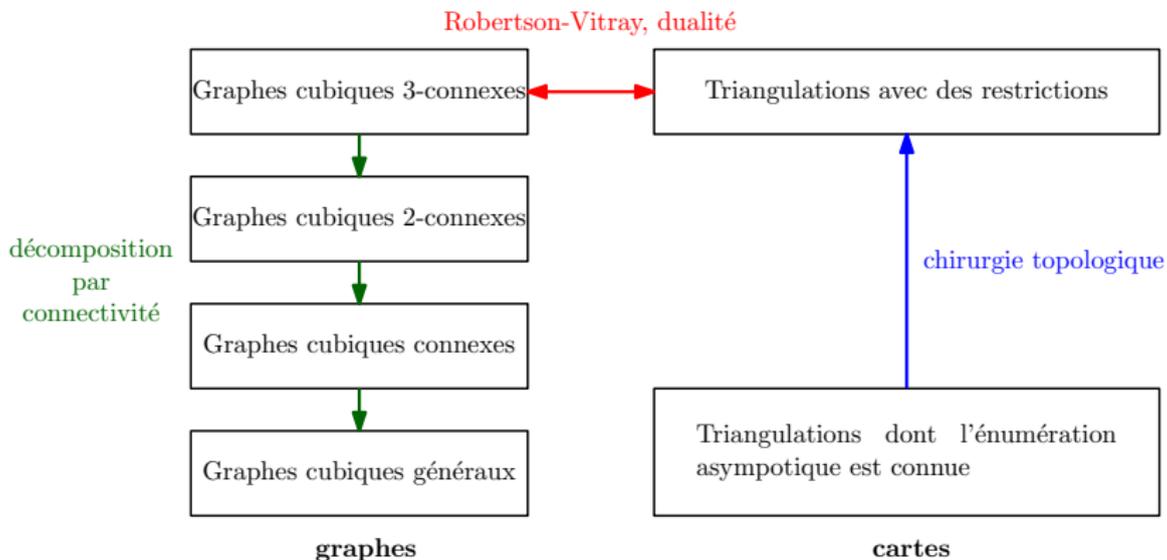
Théorème (Robertson–Vitray 1990)

*Soit G un graphe **3-connexe** plongeable dans \mathbb{S}_g , et M un tel plongement. Si $\text{fw}(M) > 2g + 3$, alors M est unique (modulo orientation).*

Un graphe est **k-connexe** s'il reste connexe à toute suppression de $k - 1$ sommets.

$g = 0 \Rightarrow$ tout graphe planaire 3-connexe a un unique plongement dans le sphère

Stratégie



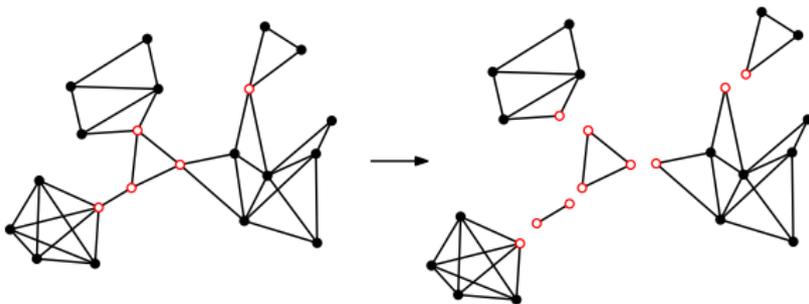
Les graphes sont toujours **étiquetés** sur les sommets. (Séries exp.)

Les cartes sont toujours **enracinées**. (Séries ord.)

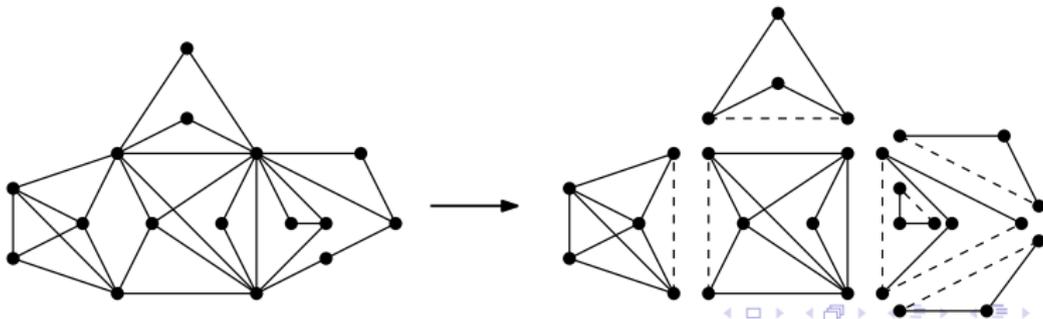
Décomposition par connexité

Général \Rightarrow 1-connexe : un graphe général = un ensemble de graphes connexes

1-connexe \Rightarrow 2-connexe :



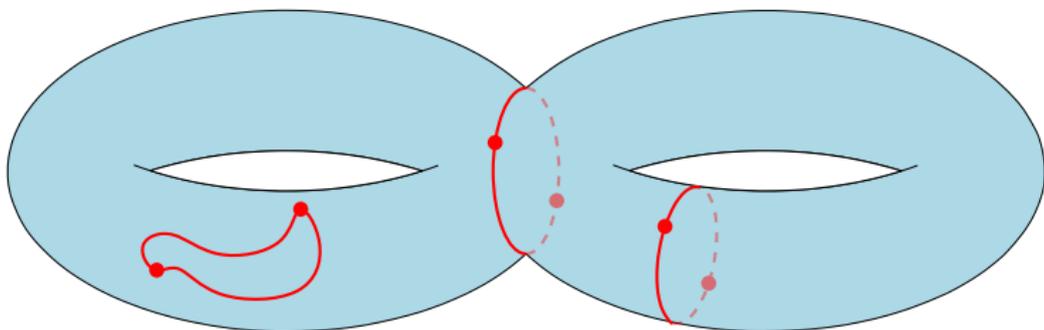
2-connexe \Rightarrow 3-connexe :



Les cycles sur une surface

Trois types de cycles :

- Planaire ;
- Non-planaire séparent ;
- Non-séparent ;



Ce que l'on cherche

Notre but temporaire : Énumérer les **cartes cubiques** 3-connexes sur \mathbb{S}_g

Proposition

Le dual d'une carte cubique 3-connexe est une triangulation sans boucle séparante, ni paire de boucle séparante, ni arête double séparante.

Nouveau but : Énumérer les **triangulations** sur \mathbb{S}_g avec quelques contraintes

Du connu à l'inconnu

	Boucles	double edges		
		Non-séparant	Planaire	Non-planaire séparant
\mathcal{M}_g	Certains	Oui	Non	Non
\mathcal{N}_g	Non	Oui	Non	Non
\mathcal{R}_g	Non	Oui	Non	Oui
\mathcal{T}_g	Non	Oui	Oui	Oui
\mathcal{S}_g	Non	Non	Non	Non

On a $\mathcal{S}_g \subseteq \mathcal{N}_g \subseteq \mathcal{R}_g \subseteq \mathcal{T}_g$ et $\mathcal{N}_g \subseteq \mathcal{M}_g$.

\mathcal{S}_g : triangulation simple (connue)

\mathcal{T}_g : triangulation sans boucle (connue)

\mathcal{M}_g : **notre but**

Ce que l'on sait

La variable t marque le nombre d'arêtes.

Les séries des cartes sont **ordinaires**.

\mathcal{S}_g : triangulation simple (connue)

$$S_0(t) = s(1 - 2s), \text{ where } t^3 = s(1 - s)^3;$$

$$S_g(t) = c_g(1 - \rho_S^{-1}t)^{-5(g-1)/2-1} \left(1 + O\left((1 - \rho_S^{-1}t)^{1/4}\right)\right).$$

\mathcal{T}_g : triangulation sans boucle (connue)

$$T_0(t) = \frac{s(1 - 4s)}{(1 - 2s)^2}, \text{ where } t^3 = s(1 - 2s)^2;$$

$$T_g(t) = c'_g(1 - \rho_T^{-1}t)^{-5(g-1)/2-1} \left(1 + O\left((1 - \rho_T^{-1}t)^{1/4}\right)\right).$$

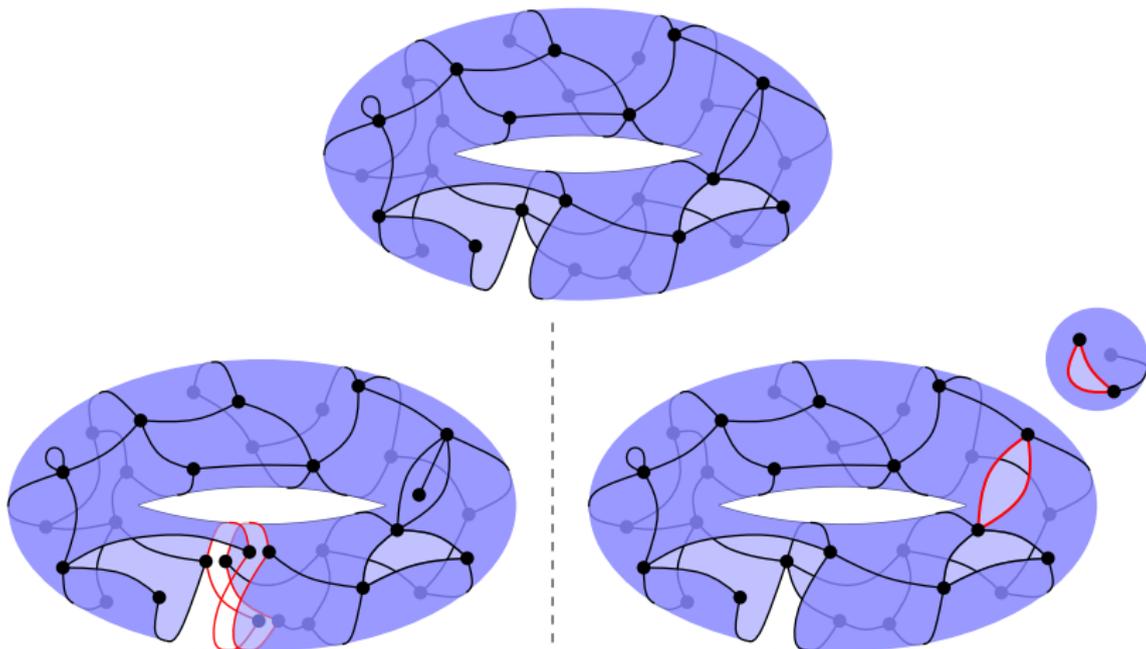
Ici, on a $c_g = 2^{5(g-1)/2}c'_g$ et $\rho_S = (9/8)\rho_T$.

On peut tout calculer sur la série planaire.

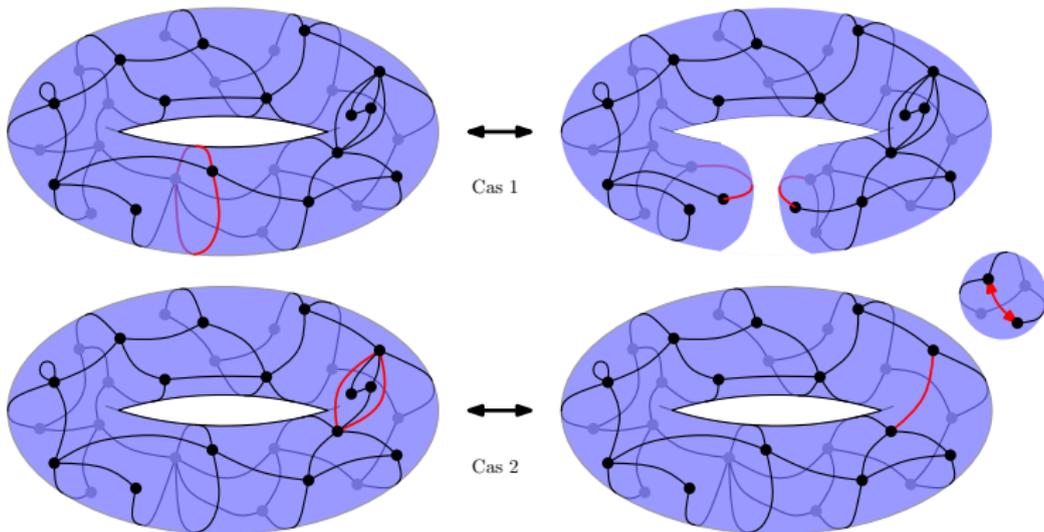
(sous le tapis : Δ -analytique)

Chirurgie

On peut traiter les cartes à bords.



Chirurgie sur les arêtes doubles



Cas 1 (non séparent) : une carte de genre $g - 1$, avec 2 arêtes marquées

Cas 2 (séparent) : deux cartes de genre $g_1 + g_2 = g$, avec une arête marquée sur celle qui contient la racine

Équation fonctionnelle de R_g

Idée : On peut éliminer toute arête double en faisant la chirurgie.

Une carte M_T dans $\mathcal{T}_g \Leftrightarrow$ Une carte M_R dans \mathcal{R}_g + une carte dans \mathcal{T}_0
pour chaque arête de M_R

On a l'équation suivant :

$$T_g(t) = \frac{1 + T_0(t) + tT_0'(t)}{1 + T_0(t)} R_g(t(1 + T_0(t))).$$

Un peu de traitement spécial pour la racine ...

Composition critique

Regardons l'équation

$$T_g(t) = \frac{1 + T_0(t) + tT_0'(t)}{1 + T_0(t)} R_g(t(1 + T_0(t)))$$

La fonction $t \mapsto t(1 + T_0(t))$ est croissante pour $0 \leq t \leq \rho_T$.

Pour $t = \rho_T$, on a $t(1 + T_0(t)) = \rho_T \cdot (9/8) = \rho_S$.

Comme $\mathcal{S}_g \subset \mathcal{R}_g$, la singularité dominante de $R_g(t)$ est $\geq \rho_S$.

Composition critique !

Avec un peu de calcul, on obtient le résultat suivant.

Proposition

Pour $g \geq 1$, la série $R_g(t)$ a la même singularité dominante ρ_S et le même comportement pour t proche de ρ_S que $S_g(t)$:

$$R_g(t) = c_g(1 - \rho_S^{-1}t)^{-5(g-1)/2-1} \left(1 + O\left((1 - \rho_S^{-1}t)^{1/4}\right)\right).$$

Couper les cycles séparants

On est dans le deuxième cas de la chirurgie.

Idée : la sous-famille des cartes contenant au moins une arête double non-séparant est sous-dominante.

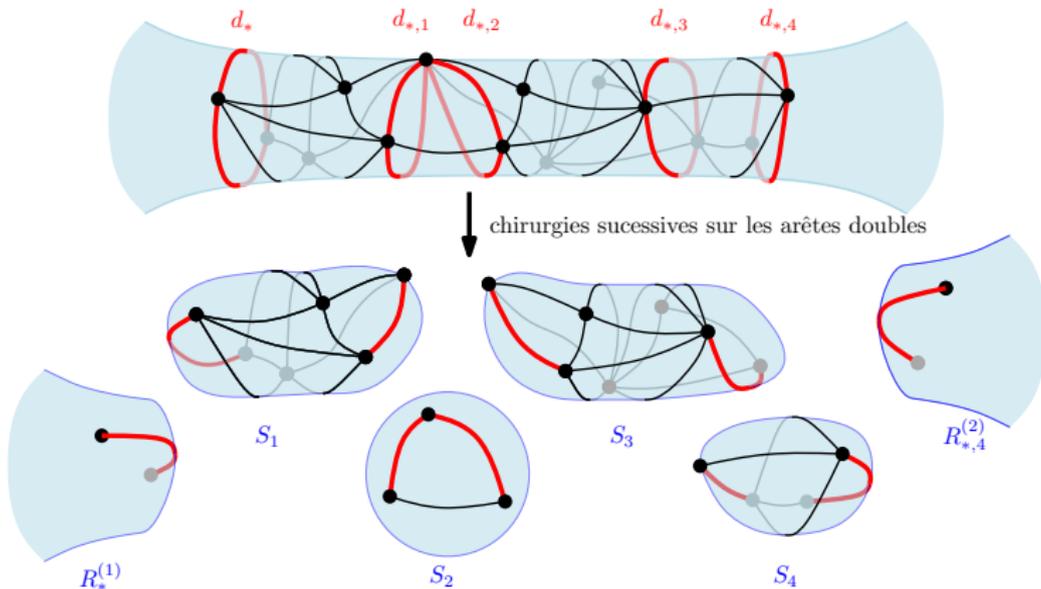
Asymptotique des cartes en genre g : $d_g \cdot n^{5(g-1)/2} \rho^n$.

Couper une arête double séparant \Rightarrow 2 cartes dont la somme des genres est g , avec un marquage de plus

L'exposant **diminue** par $1/2$! Donc sous-dominant.

Bien sûr la réalité est un peu plus compliquée ...

Chasser les parties planaires



On ramène \mathcal{R}_g et \mathcal{M}_g à \mathcal{N}_g .

Énumération asymptotique

Proposition

Pour $g \geq 1$, la série $M_g(t)$ a la même singularité dominante ρ_S et le même comportement pour t proche de ρ_S que $S_g(t)$:

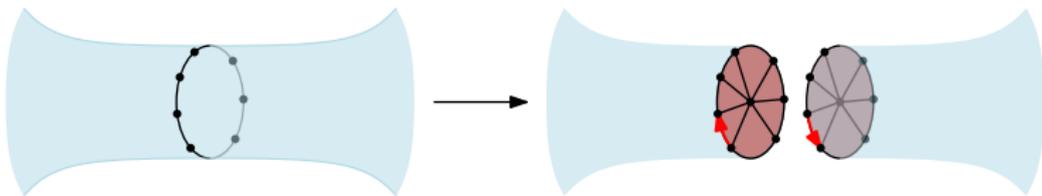
$$M_g(t) = c_g(1 - \rho_S^{-1}t)^{-5(g-1)/2-1} \left(1 + O\left((1 - \rho_S^{-1}t)^{1/4}\right)\right).$$

Contrôle de l'edgewidth

Proposition

Soit M une carte cubique et M^* sa triangulation duale, alors
 $\text{fw}(M) = \text{ew}(M)$.

On montre que les triangulations avec une edgewidth constante sont sous-dominante.



Proposition

Pour $g, k \geq 1$, la série $M_g^{\text{fw} \geq k}(t)$ des cartes cubiques 3-connexes a la même singularité dominante ρ_S et le même comportement pour t proche de ρ_S que $S_g(t)$:

$$M_g^{\text{fw} \geq k}(t) = c_g (1 - \rho_S^{-1} t)^{-5(g-1)/2-1} \left(1 + O\left((1 - \rho_S^{-1} t)^{1/4} \right) \right).$$

Les séries des graphes

Introduisons les variables :

- x : nombre de sommets ;
- y : nombre d'arêtes simples ;
- z : nombre d'arêtes doubles ;
- w : nombre de boucles.

On définit les séries **exponentielles** des graphes cubiques plongeables dans \mathbb{S}_g :

- $F_g(x, y, z, w)$: graphes cubiques généraux ;
- $C_g(x, y, z, w)$: graphes cubiques connexes ;
- $B_g(x, y, z)$: graphes cubiques bi-connexes ;
- $D_g(x, y)$: graphes cubiques *drei*-connexes (3-connexes).

Leurs variantes $F(v)$ sont définies par

$$F(v) = F\left(v^{1/4}, v^{1/6}, \frac{v^{1/3}}{2}, \frac{v^{1/6}}{2}\right).$$

De cartes aux graphes

Graphes avec sommets étiquetés et Cartes : seul automorphisme trivial.

Robertson-Vitray : $(6n)^{-1}[t^{3n}]M_g^{\text{fw} \geq 2g+3}(t) = [v^n]D_g^{\text{fw} \geq 2g+3}(v)$.

Plongement : $[v^n]D_g(v) \leq (6n)^{-1}[t^{3n}]M_g(t)$.

Or, $M_g(t)$ et $M_g^{\text{fw} \geq 2g+3}(t)$ sont asymptotiquement équivalentes, et $[v^n]D_g^{\text{fw} \geq 2g+3}(v) \leq [v^n]D_g(v)$.

Donc

$$D_g(v) \cong \frac{1}{2} \int_0^{v^{1/3}} t^{-1} M_g(t) dt.$$

On connaît alors le comportement asymptotique de $D_g(v)$ (et aussi de $D_g^{\text{fw} \geq k}(v)$ pour $0 \leq k \leq 2g + 3$).

Sous le tapis : Δ -analytique

Décomposition par connexité

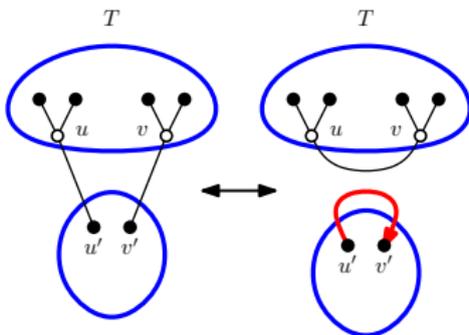
Proposition (Robertson-Vitray 1990)

Soit $g > 0$ et G un graphe connexe plongeable dans \mathbb{S}_g .

- 1 *Supposons que G est 2-connexe avec $\text{fw}_g(G) \geq 3$. Alors G a une unique composante 3-connexe qui est non-planaire et plongeable dans \mathbb{S}_g avec la même facewidth que G . Tous les autres composantes 3-connexes sont planaires.*
- 2 *Supposons que $\text{fw}_g(G) \geq 2$. Alors G a une unique composante 2-connexe qui est non-planaire et plongeable dans \mathbb{S}_g avec la même facewidth que G . Tous les autres composantes 2-connexes sont planaires.*

De 3-connexe à 2-connexe

Prenons l'unique composante 3-connexe.



Un **réseau** est un graphe cubique planaire 2-connexe enraciné. Notons $N^\circ(x, y, z)$ sa série exponentielle.

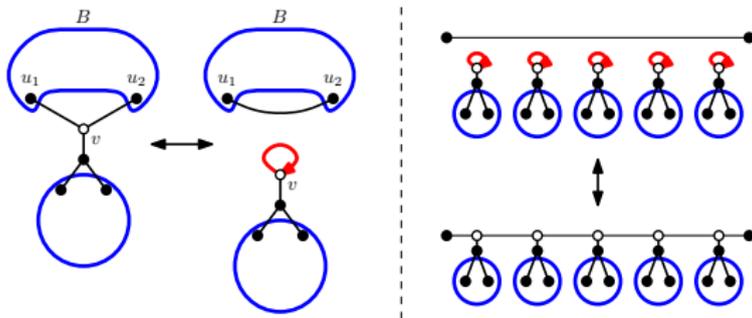
Un graphe cubique 2-connexe avec $\text{facewidth} \geq 3 \cong$ Un graphe cubique 3-connexe avec un réseau sur chaque arête

Proposition

On a $B_g^{\text{fw} \geq 3}(x, y, z) \cong D^{\text{fw} \geq 3}(x, \bar{y})$, où $\bar{y} = y(1 + N^\circ(x, y, z))$.

De 2-connexe à connexe

Prenons l'unique composante 2-connexe.



Soit $Q(x, y, z, w)$ la série des graphes cubiques planaires avec une **boucle marquée**.

Proposition

$$C_g^{\text{fw} \geq 2}(x, y, z, w) \cong B^{\text{fw} \geq 2}(x, \bar{y}, \bar{z}),$$

où

$$\bar{y} = \frac{y}{1 - Q(x, y, z, w)}, \quad \bar{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{1 - Q(x, y, z, w)} \right)^2 - \frac{y^2}{2} + z.$$

Un système ...

Maintenant il faut étudier $N^\circ(x, y, z)$ et $Q(x, y, z, w)$.

La série $Q(x, y, z, w)$ satisfait le système suivant :

$$Q = \frac{x^2 y^3}{2} A + \frac{Q^2}{2} + x^2 y^2 w,$$

$$A = Q + S + P + H,$$

$$S = \frac{A^2}{A + 1},$$

$$P = \frac{x^2 y^3}{2} A^2 + x^2 y^3 A + x^2 y z,$$

$$2(1 + A)H = U(1 - 2U) - U(1 - U)^3,$$

$$x^2 y^3 (1 + A)^3 = U(1 - U)^3,$$

avec A, S, P, H, U des série en variables x, y, z, w .

La série $N^\circ(x, y, z)$ satisfait un système similaire mais beaucoup plus simple.

... basé sur une décomposition

Variante de Bodirsky–Kang–Löffler–McDiarmid (2006) :

$$Q = \frac{x^2 y^3}{2} A + \frac{Q^2}{2} + x^2 y^2 w,$$

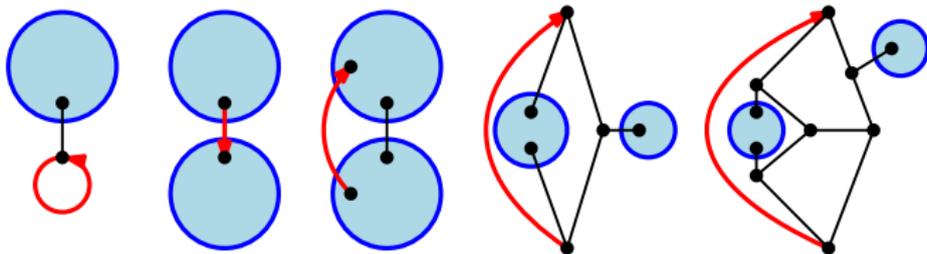
$$A = Q + S + P + H,$$

$$S = \frac{A^2}{A + 1},$$

$$P = \frac{x^2 y^3}{2} A^2 + x^2 y^3 A + x^2 y z,$$

$$2(1 + A)H = U(1 - 2U) - U(1 - U)^3,$$

$$x^2 y^3 (1 + A)^3 = U(1 - U)^3.$$



Composition critique

On s'intéresse à la variante $F(v)$.

Proposition

La singularité dominante de $N^\circ(v)$ est à $\rho_N = 2^4 3^3 / 17^3$. De plus, $N^\circ(\rho_N) = 1/16$.

$B_g^{\text{fw} \geq 3}(v) \cong D^{\text{fw} \geq 3}(\bar{v})$, où $\bar{v} = v(1 + N^\circ(v))$.

Composition critique "car" $\rho_D = \rho_S^3 = \rho_N(1 + N^\circ(\rho_N))^3$.

Proposition

La singularité dominante de $Q(v)$ est à $\rho_Q = 54 \cdot 79^{-3/2}$. De plus, $Q(\rho_Q)$ est fini.

$C_g^{\text{fw} \geq 2}(v) \cong B^{\text{fw} \geq 2}(\bar{v})$ est aussi une composition critique. Donc la singularité dominante de $C_g(v)$ est ρ_Q .

Asymptotique

Proposition

Pour tout $g \geq 1$, la singularité dominante de $C_g(v)$ est $\rho_Q = \frac{54}{793^{3/2}}$. De plus,

$$C_1(v) \cong c_1 \log(1 - \rho_Q^{-1}v) + O\left((1 - \rho_Q^{-1}v)^{1/4}\right),$$

$$C_g(v) \cong c_g(1 - \rho_Q^{-1}v)^{-5(g-1)/2} \left(1 + O\left((1 - \rho_Q^{-1}v)^{1/4}\right)\right), \forall g \geq 2.$$

Pour les graphes généraux en genre g , on démontre que la partie prédominante est donnée par les graphes connexes en genre g .

Version nombre par le théorème de transfert.

Conclusion

- 1 Transitions de phase ?
- 2 Autres études probabilistes ? Par exemple l'espérance du nombre d'un certain sous-graphe induit ?

Merci de votre attention !