

Constellations : mise en équation, résolution, rationalité

Wenjie Fang, LIAFA.
Travaux joints avec Guillaume Chapuy

04 février 2015, LaBRI, Université de Bordeaux
Journées de Combinatoire de Bordeaux 2015

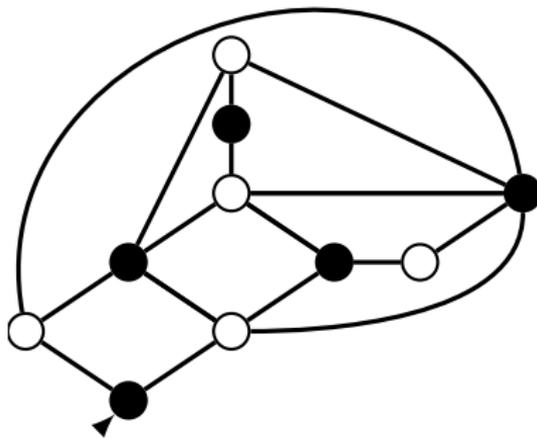
Constellations : un modèle avec plein de connexions mystérieuses

Wenjie Fang, LIAFA.
Travaux joints avec Guillaume Chapuy

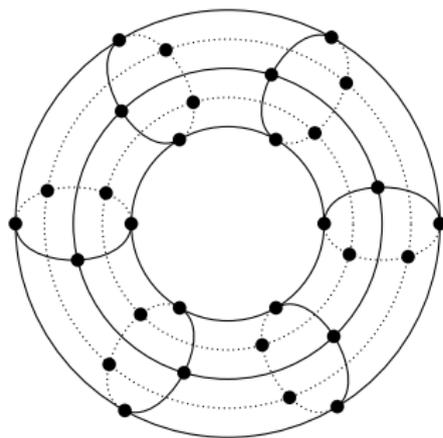
04 février 2015, LaBRI, Université de Bordeaux
Journées de Combinatoire de Bordeaux 2015

Cartes combinatoires

Une **carte** = un plongement propre d'un graphe dans une surface
On se concentre sur les surfaces *orientables*.



Carte plane et bipartie



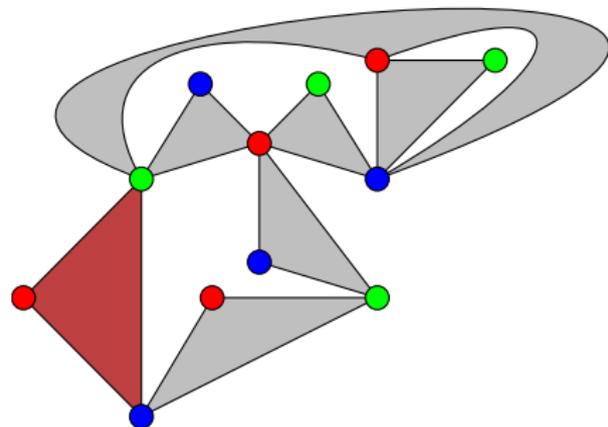
Carte sur un tore

Constellation

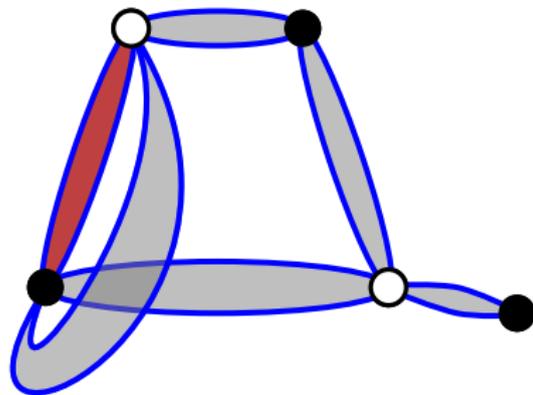
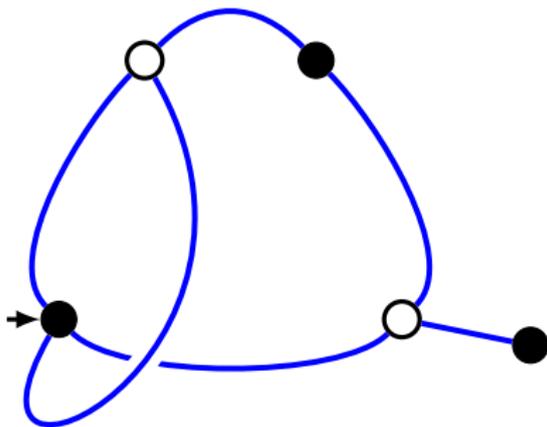
Une r -**constellation** est une carte spéciale.

- Faces coloriées blanches ou noires
- Faces noires (**hyperarêtes**) : degré r
- Faces blanches (**hyperfaces**) : degré multiple de r
- Sommets en r couleurs en ordre autour de chaque face noire
- Une hyperarête **racine**

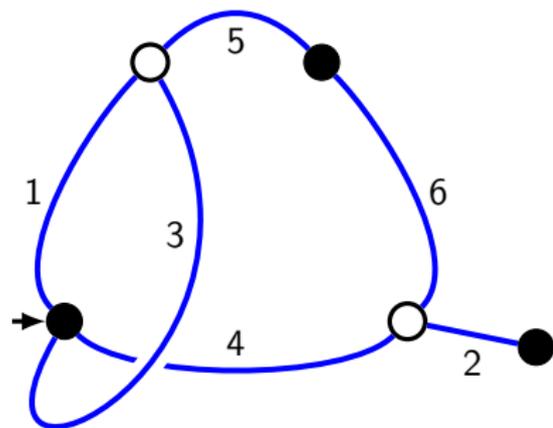
Aussi le dual d'une carte bipartie



Carte bipartie = 2-constellation



Système de rotation



Les arêtes sont étiquetées de 1 à n .

- Sommets noirs

$$\sigma_{\bullet} = (1, 3, 4)(2)(5, 6)$$

- Sommets blancs

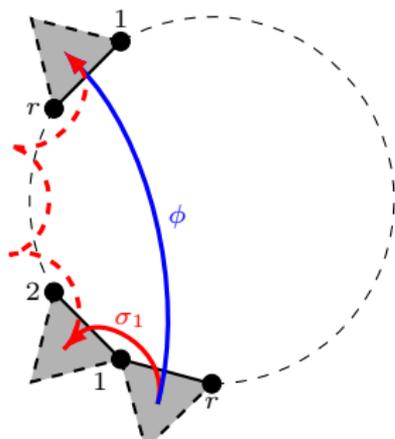
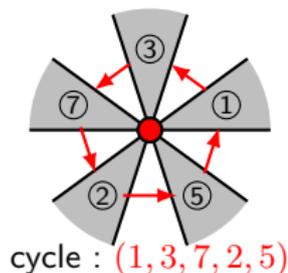
$$\sigma_{\circ} = (1, 3, 5)(2, 6, 4)$$

- Faces

$$\phi = (1, 5, 4, 3, 2, 6)$$

On a $\phi = \sigma_{\bullet}\sigma_{\circ}$.

Système de rotation (suite)



Les *hyperarêtes* sont étiquetées de 1 à n .

- σ_i : hyperarêtes autour de chaque sommet de couleur i
- ϕ : hyperarêtes adjacentes à chaque hyperface par une arête 1 - r

$$\sigma_1 \dots \sigma_r = \phi kr$$

Taille n : une r -constellation $\leftrightarrow (n - 1)!$
factorisations

Sous le tapis : connexité

Lien avec les nombres de Hurwitz

r -Constellations \sim factorisation en r permutations

$$G_0^r(\alpha) = \frac{d!}{|\text{Aut } \alpha|} r ((r-1)d - \ell(\alpha) + 2)^{\overline{\ell(\alpha)-2}} \prod_{j=1}^{\ell(\alpha)} \binom{r\alpha_j - 1}{\alpha_j}$$

Hurwitz classique \sim factorisation en transpositions

$$H_0(\alpha) = \frac{d!}{|\text{Aut } \alpha|} (d + \ell(\alpha) - 2)! d^{\ell(\alpha)-3} \prod_{j=1}^{\ell(\alpha)} \frac{\alpha_j^{\alpha_j}}{\alpha_j!}$$

Hurwitz monotone \sim factorisation *monotones* en transpositions

$$G_0^r(\alpha) = \frac{d!}{|\text{Aut } \alpha|} (2d + 1)^{\overline{\ell(\alpha)-3}} \prod_{j=1}^{\ell(\alpha)} \binom{2\alpha_j}{\alpha_j}$$

Formules et notations prises de *Monotone Hurwitz Numbers in Genus Zero*
de Goulden, Guay-Paquet, Novak

Ce que l'on sait déjà ...

| Cas planaire | | | |
|-------------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|
| | Méthode | comptage | algébricité |
| Bijection | arbre bourgeonnant (Bousquet-Mélou et Schaeffer) mobile (Bouttier, Di Francesco et Guitter) | exact | ✓ |
| Eq. fct. | $r = 2$ (Bender et Canfield) $r = 3$ (Bousquet-Mélou et Jehanne) | $r = 2, 3$: exact | ✓ (Bousquet-Mélou et Jehanne) |
| Cas en genre supérieur | | | |
| Bijection | variant de mobile (Chapuy) | asympt. | restriction de degré de face |
| Eq. fct. ($r = 2$) | récurrence topologique (Kazarian et Zograf; cf Eynard) | exact pour nb de face fixé | — |

..., ce que l'on sait de plus maintenant ...

| Cas planaire | | | |
|-------------------------|---|--------------|-------------------------------|
| | Méthode | comptage | algébricité |
| Bijection | arbre bourgeonnant (Bousquet-Mélou et Schaeffer) mobile (Bouttier, Di Francesco et Guitter) | exact | ✓ |
| Eq. fct. | méthode différentielle-catalytique (Chapuy et W.F.) recyclant la méthode de m-Tamari (Bousquet-Mélou, Chapuy, Préville-Ratelle) | exact | ✓ (Bousquet-Mélou et Jehanne) |
| Cas en genre supérieur | | | |
| Bijection | variant de mobile (Chapuy) | asympt. | restriction de degré de face |
| Eq. fct. ($r = 2$) | récurrence topologique (Kazarian et Zograf; cf Eynard) (Chapuy et W.F.) | exact | ✓ |

Nos résultats : cas $g = 0$ et r général

$F_{g,r}$ = la série ordinaire des r -constellations en genre g , avec les poids

- t : hyperarêtes
- x : degré de l'hyperface racine, divisé par r
- p_k : hyperfaces non-racine de degré rk

Chgt. de var. $t, x \leftrightarrow z, u$:

$$t = z \left(1 + \sum_{k \geq 1} \binom{rk-1}{k} p_k z^k \right)^{-(r-1)}, \quad x = u(1 + uz)^{-r}$$

Théorème (Bijection (Bousquet-Mélou - Schaeffer ; Bouttier - Di Francesco - Guitter))

$$F_{0,r}(x, t) = (1 + zu) \left(1 - \sum_{j \geq 1} p_j z^j \sum_{l=1}^{(r-1)j-1} z^l u^l \binom{rj-1}{j+l} \right).$$

Nous avons maintenant une preuve à partir de l'équation fonctionnelle.

Variables grecques

Pour exprimer les séries en genre supérieur, on introduit les “variables” suivantes.

$$\gamma = \sum_{k \geq 1} \binom{2k-1}{k} p_k z^k \quad (\text{série des mobiles})$$

$$\eta = \sum_{k \geq 1} (k-1) \binom{2k-1}{k} p_k z^k, \quad \eta_i = \sum_{k \geq 1} (k-1) k^i \binom{2k-1}{k} p_k z^k$$

$$\zeta = \sum_{k \geq 1} \frac{k-1}{2k-1} \binom{2k-1}{k} p_k z^k$$

$$\zeta_i = \sum_{k \geq 1} \frac{(-2)^{i+1} k(k-1) \cdots (k-i)}{(2k-1)(2k-3) \cdots (2k-2i-1)} \binom{2k-1}{k} p_k z^k$$

Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell)$, notons $\eta_\alpha = \prod_{i=1}^{\ell} \eta_{\alpha_i}$. Idem pour ζ_β .

Nos résultats : cas $g \geq 1$ et $r = 2$ (biparti), enraciné

Théorème (Chapuy et F.)

La série ordinaire des 2-constellations en genre g a la forme

$$F_{g,2} = \sum_{c=1}^{6g-1} \sum_{\alpha, \beta, a \geq 0, b \geq 0} \frac{\eta_\alpha \zeta_\beta}{(1-\eta)^a (1+\zeta)^b} \left(\frac{d_{a,b,c,g,+}^{\alpha,\beta}}{(1-uz)^c} + \frac{d_{a,b,c,g,-}^{\alpha,\beta}}{(1+uz)^c} \right).$$

Ici, α, β sont des partitions, $d_{a,b,c,\pm}^{\alpha,\beta} \in \mathbb{Q}$, et $d_{a,b,c,\pm}^{\alpha,\beta} \neq 0$ implique

- $\lceil \frac{1+c}{2} \rceil + |\alpha| + |\beta| \leq (2 \pm 1)g$,
- $a + b = \ell(\alpha) + \ell(\beta) + 2g - 1$.

Exemple :

$$F_1 = \frac{(\eta - 2\eta_1 - 1)/16}{(1-uz)^2(1-\eta)^2} + \frac{4(1+\zeta)\eta_1 + 3\eta^2 - 6\zeta(1-\eta) + 3}{96(1-uz)(1+\zeta)(1-\eta)^2} - \frac{1/2}{(1-uz)^5(1-\eta)} - \frac{5/4}{(1-uz)^4(1-\eta)}$$

$$- \frac{1/32}{(1+uz)(1+\zeta)} - \frac{(21\eta - 2\eta_1 - 21)/24}{(1-uz)^3(1-\eta)^2}$$

Nos résultats : cas $g \geq 2$ et $r = 2$ (biparti), factorisation

$L_{g,r}$ = la série exp. des factorisations de type r -constellations en genre g

Théorème (Chapuy et F.)

$$L_{1,2} = \frac{1}{24} \ln \frac{1}{1-\eta} + \frac{1}{8} \ln \frac{1}{1+\zeta}.$$

Théorème (Chapuy et F.)

$$L_{g,2} = \sum_{\alpha, \beta, a \geq 0, b \geq 0} c_{a,b,g}^{\alpha, \beta} \frac{\eta^\alpha \zeta^\beta}{(1-\eta)^a (1+\zeta)^b}.$$

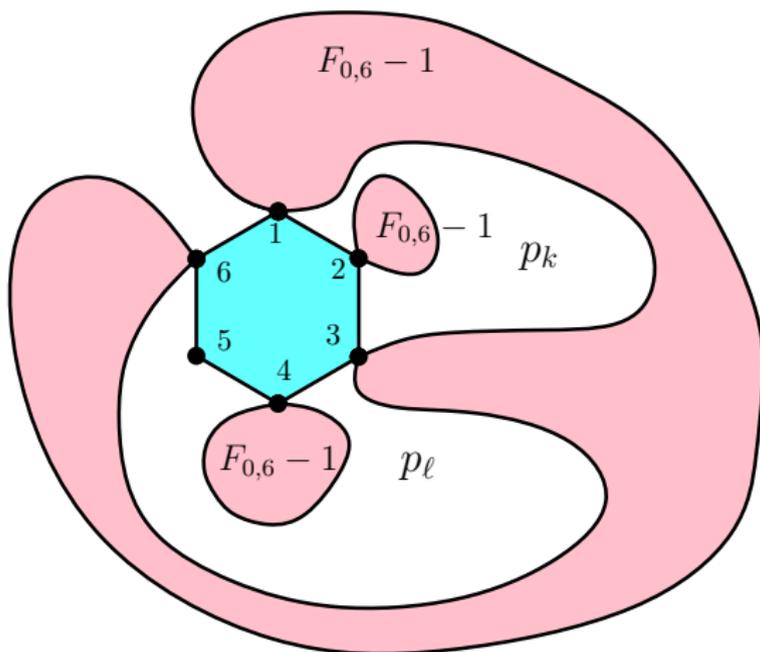
Ici $g \geq 2$, $c_{a,b}^{\alpha, \beta} \in \mathbb{Q}$, α, β sont des partitions vérifiant

- $|\alpha| + |\beta| \leq 3(g-1)$,
- $a + b = \ell(\alpha) + \ell(\beta) + 2g - 2$.

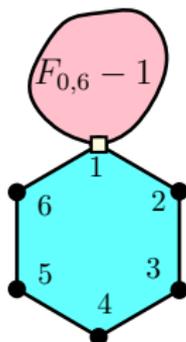
Mise en équation des constellations

Exemple : Autour de l'hyperarête racine ...

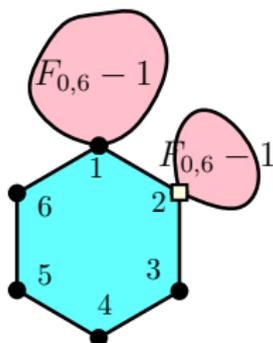
... d'une 6-constellation planaire ...



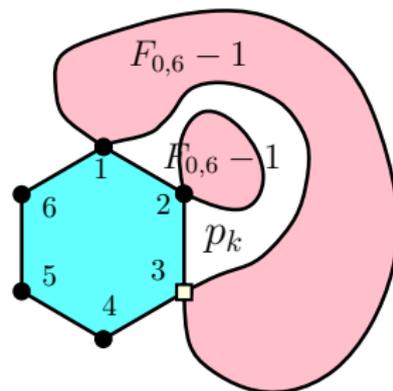
... par étape



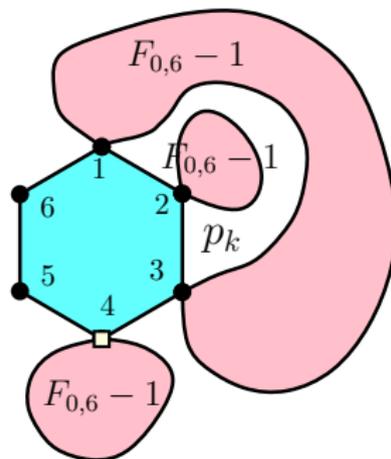
... par étape



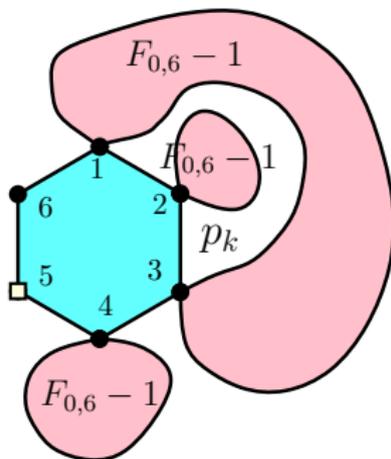
... par étape



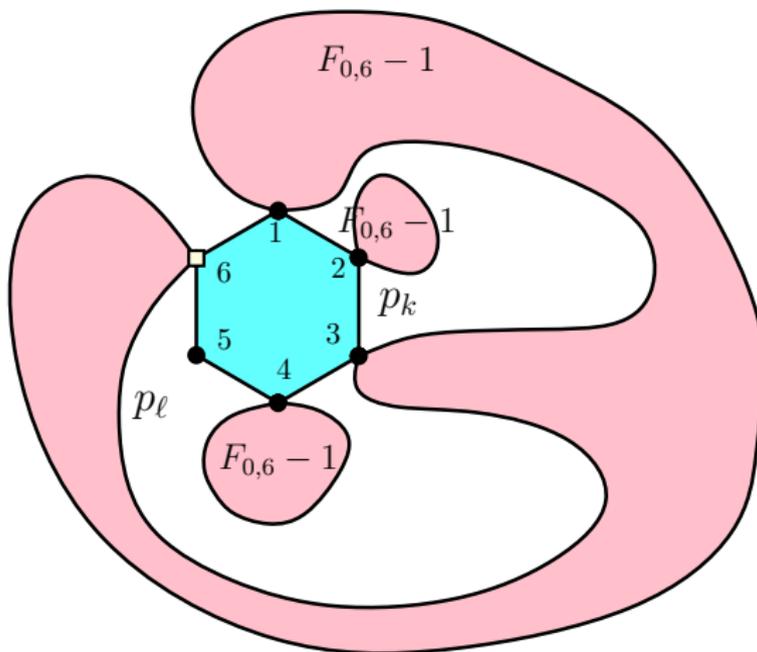
... par étape



... par étape

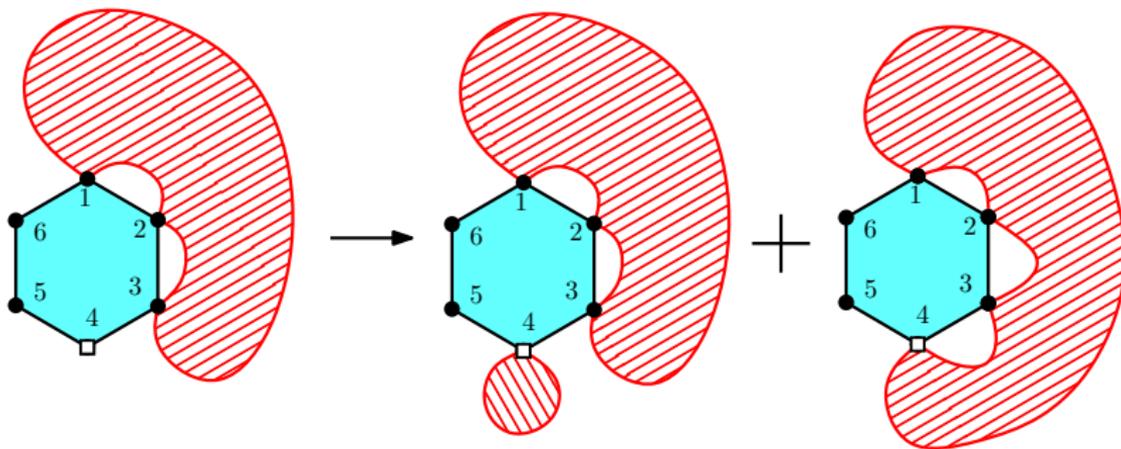


... par étape



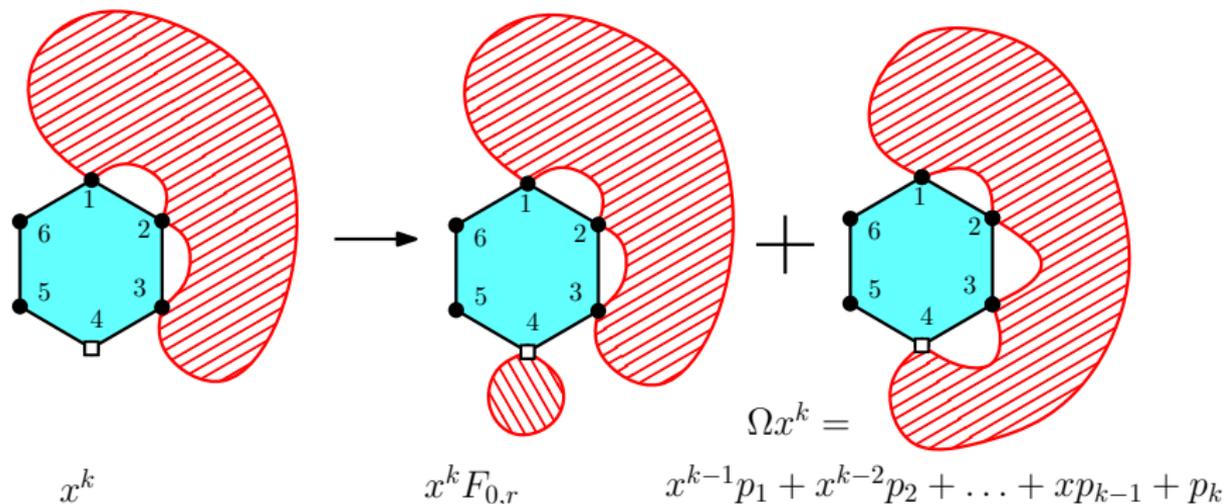
L'équation planeaire

Deux façons d'attacher un coin de l'hyperarête racine



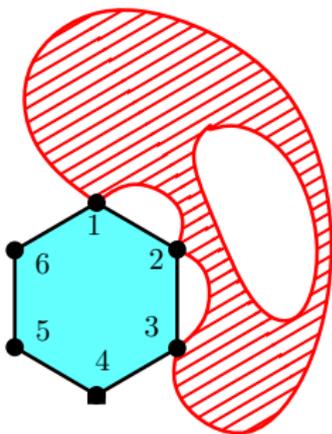
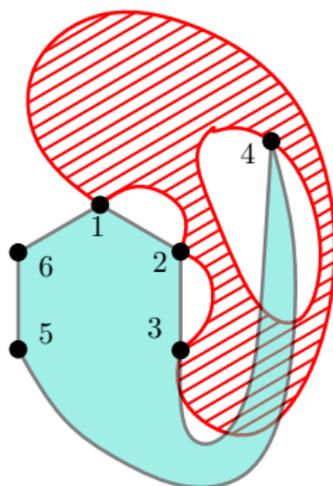
L'équation planeire

$x^k \leftrightarrow$ Hyperface extérieure de degré $r(k+1)$



Donc $F_{0,r} = xt(F_{0,r} + \Omega)^r(1)$.

Cas supplémentaire en genre supérieur


 G

 $\Gamma G = \sum_{k \geq 1} k x^k \frac{\partial}{\partial p_k} G$

L'équation devient

$$F_{g,r} = xt[y^g] \left(\sum_{h=0}^g y^h F_{h,r} + \Omega + y\Gamma \right)^r \quad (1).$$

Troncature

Troncature avec un paramètre K : $p_k = 0$ pour $k > K$.

C'est comme considérer les constellations dont le degré d'une hyperface *non-racine* est au plus rK .

L'opérateur Ω devient

$$\Omega = [x^{\geq 0}] \sum_{i=1}^K \frac{p_i}{x^i}$$

Dans la résolution suivante, on va résoudre avec la troncature, puis prendre la limite.

Résolution de l'équation des r -constellations planaires

~

Comment la résolution des intervalles m -Tamari s'adapte aux r -constellations planaires

Etape 1 : linéarisation

$$F_{0,r}(x, t) = 1 + tx(F_{0,r}(x, t) + \Omega)^r(1)$$

Stratégie générale : guess-and-check (solution déjà connue).

Obstacle 1 : opérateurs itérés

Solution : linéarisation avec une autre variable catalytique.

Notons $A = F_{0,r} - 1$ la série **conjecturée**.

$$G(x, y, t) = tx(1 + y(A + \Omega))^r(1)$$

But : vérifier que la solution G admet $G(x, 1, t) = A(x, t)$.

En dérivant par rapport à y , on a

$$(1 + y(A + \Omega)) \frac{\partial G}{\partial y} = r(A + \Omega)G.$$

C'est *presque* une équation différentielle *linéaire*.

Etape 2 : séparation des restes

$$(1 + y(A + \Omega)) \frac{\partial G}{\partial y} = r(A + \Omega)G$$

Obstacle 2 : opérateur Ω

Solution : remplacer Ω par un polynôme en x^{-1} , et gérer le reste

$$\Omega = [x^{\geq 0}] \sum_{k=1}^K \frac{p_k}{x^k}, \quad \theta = \sum_{k=1}^K \frac{p_k}{x^k}$$

Donc on peut écrire

$$(1 + y(A + \theta)) \frac{\partial G}{\partial y} = r(A + \theta)G + S,$$

avec S la partie de puissance négative.

S est un polynôme en x^{-1} de degré au plus $K - 1$.

Etape 3 : “harmonisation”

Notons $N(x, t) = A + \theta$. On écrit

$$(1 + yN) \frac{\partial G}{\partial y} = rNG + S.$$

Avec $t, x \leftrightarrow z, u$, $u^K N(u, z)$ est un polynôme en u de degré $K + 1$.

$N(u', z) = N(u, z)$ a $K + 1$ solutions $u_0 = u, u_1, \dots, u_K$. $u_i, z \leftrightarrow x_i, t$.

Considérons l'opérateur suivant.

$$F(x) \mapsto \tilde{F}(x) = \sum_{i=0}^K \frac{F(x_i)}{\prod_{j \neq i} (x_i^{-1} - x_j^{-1})}$$

S polynôme de x^{-1} de degré $< K \Rightarrow \tilde{S} = 0$. Donc on “harmonise” :

$$(1 + yN) \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y} = rN\tilde{G}.$$

Etape 4 : reconstruction

$$(1 + yN) \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y} = rN\tilde{G}$$

Sous-buts :

- Résoudre l'équation, vérifier que $\tilde{G}(x, 1, t) = \tilde{A}(x, t)$ (**validité**)
- Montrer que, dans notre cadre,
 $\tilde{G}(x, 1, t) = \tilde{A}(x, t) \Rightarrow G(x, 1, t) = A(x, t)$ (**unicité**)

La validité se fait avec un calcul.

Pour l'unicité, on peut "reconstruire" (pas facile!) la série $G(x, 1, t)$ en t avec coeffs polynomiaux en x (cette forme vient de la combinatoire).

C'est la même méthode pour les intervalles de m -Tamari.

Résolution de l'équation des 2-constellations en genre supérieur, et la **rationalité** de la solution

~

Comment nous avons adapté et formalisé la *récurrence topologique* d'Eynard pour les cartes biparties

L'équation pour $r = 2$ et $g \geq 1$

$$F_{g,r} = xt[y^g] \left(\sum_{h=0}^g y^h F_{h,r} + \Omega + y\Gamma \right)^r \quad (1)$$

Déjà c'est linéaire. Pour $r = 2$, c'est encore plus simple.

$$F_{g,2} = xt \left(\Gamma F_{g-1,2} + \Omega F_{g,2} + \sum_{h=0}^g F_{h,2} F_{g-h,2} \right)$$

On peut séparer le reste comme le cas planaire.

$$Y F_{g,2} = xt H_g + xt S_g$$

- $Y = 1 - xt(2F_{0,2} + \theta)$ (noyau, invariant par g)
- $H_g = \Gamma F_{g-1,2} + \sum_{h=1}^{g-1} F_{h,2} F_{g-h,2}$ (partie connue)
- S_g un polynôme en x^{-1} de degré $\leq K - 1$ (reste)

Fixons le domaine

On veut montrer par induction que $F_{g,2}$ est dans l'ev \mathbb{A} engendré par les termes de la forme

$$\frac{\eta_\alpha \zeta_\beta}{(1 - \eta)^a (1 + \zeta)^b (1 \pm uz)^c}$$

avec coeffs rationnels, et des restrictions sur les indices.

Par calcul, Γ stabilise \mathbb{A} .

$$Y F_{g,2} = xtH_g + xtS_g$$

$H_1 \in \mathbb{A}$ se calcule.

Hypo. ind. $\Rightarrow H_g = \Gamma F_{g-1,2} + \sum_{h=1}^{g-1} F_{h,2} F_{g-h,2} \in \mathbb{A}$ pour $g \geq 2$

Il faut maintenant "éliminer" le reste S_g .

Etude des pôles

On utilisera le **résidu** pour éliminer S_g , d'où l'étude des pôles.

$$F_{g,2}(u, z) = \frac{x t(H_g(u, z) + S_g(u, z))}{Y(u, z)}$$

Pôles en u possibles : 0 , ∞ , $\pm z^{-1}$, racines de Y .

Racines de Y : $-z^{-1}$, "**petites**" (convergent à $z = 0$) et "**grandes**".

$F_{g,2}(u)$ n'a pas de "**petit**" pôle (définition combinatoire), ni pôle à ∞ (analyse fine de degré).

L'involution $\mathcal{M} : u \rightarrow 1/z^2 u$ échange alors les **petites** et les **grandes** racines de Y , mais laisse les pôles de $F_{g,2}$ invariant.

Les pôles de $F_{g,2}$ sont $u = \pm z^{-1}$.

Expression en résidu

$$F_{g,2}(u, z) = \frac{xtH_g(u, z)}{Y(u, z)} + \frac{xtS_g(u, z)}{Y(u, z)}$$

Avec un préfacteur $P(u, z)$ bien choisi, et une notion de résidu **algébrique** pour les fractions rationnelles, on peut écrire

$$\begin{aligned} P(v, z)F_{g,2}(v, z) &= \operatorname{Res}_{u=v} \left[\frac{xtP(u, z)H_g(u, z)}{(u-v)Y(u, z)} + \frac{xtP(u, z)S_g(u, z)}{(u-v)Y(u, z)} \right] \\ &= -\operatorname{Res}_{u=\pm z^{-1}} \frac{xtP(u, z)H_g(u, z)}{(u-v)Y(u, z)} \end{aligned}$$

Les dérivées successives de $Y = \text{combin. lin. de } \gamma, \eta, (\eta_i)_{i \geq 1}, \zeta, (\zeta_i)_{i \geq 1}$.
Par calcul, $F_{g,2} \in \mathbb{A}$.

Les bornes viennent d'une analyse fine de degré.

Rationalité quand la racine est oubliée

Combinatoirement on a $F_{g,2} = \Gamma L_{g,2}$. Il suffit d'inverser Γ (pas facile!). Or, Γ est une "différentiation", et l'inverse c'est une "intégration", qui donne

$$L_{g,2} = R_1 + R_2 \ln \frac{1}{1-\eta} + R_3 \ln \frac{1}{1+\zeta},$$

avec R_1, R_2, R_3 rationnels en les var. grec. avec dénom. $(1-\eta)^a(1+\zeta)^b$.

On montre que $R_2 = R_3 = 0$ avec un résultat de rationalité moins fort de Chapuy.

Les bornes viennent encore d'une analyse fine de degré.

Comparaison avec les nombres de Hurwitz

Cartes biparties :

$$L_{g,2} = \sum_{\alpha, \beta, a \geq 0, b \geq 0} c_{a,b,g}^{\alpha, \beta} \frac{\eta_\alpha \zeta_\beta}{(1 - \eta)^a (1 + \zeta)^b}$$

avec $|\alpha| + |\beta| \leq 3(g - 1)$ et $a + b = \ell(\alpha) + \ell(\beta) + 2g - 2$

Nombres de Hurwitz monotones (Goulden, Guay-Paquet et Novak) :

$$H_g = c_{g, 2g-2}^{(0)} + \sum_{\alpha, a \geq 0} c_{g,a}^{\alpha} \frac{\eta'_\alpha}{(1 - \eta')^a}$$

avec $|\alpha| \leq 3(g - 1)$ et $a = \ell(\alpha) + 2g - 2$

Même forme avec les nombres de Hurwitz classiques (Goulden, Jackson et Vakil).

... et ce que l'on ne sait pas encore.

- D'autres exemples d'équations qui se résolvent avec la même méthode que l'équation plane? A quel type d'équation elle s'applique?
- Rationalité en genre supérieur pour r général? Preuve unifiée avec les nombres de Hurwitz?

Merci de votre attention !